Technische Universität Berlin **WS 2006/07**
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6–1, Frau Klink

Dr. Ralf Borndörfer
Dr. Christian Liebchen
Dr. Marc Pfetsch

1. Übung Ganzzahlige Optimierung im Öffentlichen Verkehr

Besprechung: 30.10.2006

1. Aufgabe

Konstruiere ein Eisenbahnverkehrsnetz, für das zwar ein zulässiger Taktfahrplan existiert, jedoch kein symmetrischer zulässiger Taktfahrplan!

Hinweis: Symmetrische Taktfahrpläne legen die *Zeit* der Begegnung von Zügen aus Richtung und Gegenrichtung einer Linie fest — eingleisige Streckenabschnitte den *Ort* der Begegnung.

2. Aufgabe

Gelingt es dir, die folgende Aussage zu beweisen oder zu widerlegen?
Sei die Zahl der einzusetzenden Fahrzeuge die einzige Zielfunktion für ein Verkehrsnetz. Die Menge der zu betreibenden Linien sei fest, ebenso deren Fahrzeiten. Ferner sei eine Gesamtfahrtenanzahl in einem Referenzintervall (z.B. "fünf Fahrten pro Stunde") vorgegeben, die für jede Linie exakt einzuhalten ist. Über einen unendlichen Betriebszeitraum betrachtet existiert unter allen Fahrplänen, welche die minimale Fahrzeuganzahl ermöglichen, stets ein exakter Taktfahrplan, also im Beispiel ein glatter 12-Minutentakt auf allen Linien.

3. Aufgabe

Sei $\mathcal{I} = (D, \ell, u)$ eine Instanz von T-Pesp. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass für jeden Bogen a $0 \le \ell_a < T$ und $0 \le u_a - \ell_a < T$ gelten. Zu jeder zulässigen Lösung $\pi \in [0, T)^V$ von $\mathcal{I}$ betrachten wir die eindeutigen ganzzahligen Variablen $p_a(\pi)$ mit

$$\ell_a \le \pi_j - \pi_i + T \cdot p_a(\pi) \le u_a, \quad a = (i, j) \in A.$$

Gib möglichst enge untere und obere Schranken $\underline{p}_a$ bzw. $\overline{p}_a$ an, so dass für jeden Vektor π wie oben gilt:

$$\underline{p}_a \le p_a(\pi) \le \overline{p}_a, \quad a = (i, j) \in A.$$

4. Aufgabe

Sei $\mathcal{I} = (D, \ell, u, w)$ eine Optimierungsinstanz von T-Pesp, also mit einer Zielfunktion, die etwaig entstehende Wartezeiten $(\pi_j - \pi_i - \ell_a) \bmod T$ mit nicht-negativen Faktoren w_a linear bestraft,

$$\sum_{a=(i,j)\in A} w_a \cdot ((\pi_j - \pi_i - \ell_a) \bmod T).$$

Sei der zu Grunde liegende ungerichtete Graph $G(D)$ von D ein Baum. Gib einen linearen Algorithmus an, der eine zulässige Lösung für $\mathcal{I}$ mit Zielfunktionswert null konstruiert!

5. Aufgabe

Betrachte die *ICE International* Linie zwischen Amsterdam CS und Frankfurt (Main) Hbf. Gemäß des aktuellen Fahrplans beträgt die Reisezeit pro Richtung 3:53h, also incl. aller Aufenthaltszeiten. Wir nehmen an, dass die Mindestumkehrzeit an beiden Endbahnhöfen jeweils 60 Minuten beträgt und dass die Linie alle zwei Stunden bedient wird.

1. Finde zwei Taktfahrpläne für den *ICE International*, für deren Betrieb eine unterschiedliche Anzahl von Zuggarnituren erforderlich ist!

2. Konstruiere ein Pesp-Modell mit vier Knoten, welche die Ankunfts- und Abfahrtsereignisse in Amsterdam und Frankfurt modellieren, und das die folgenden beiden Eigenschaften hat: Jeder zulässige Taktfahrplan hält die Reisezeiten genau ein, und genau solche Vektoren π sind zulässig, welche (unter Einhaltung der Mindestumkehrzeit) die kleinere der beiden in Teil 1 identifizierten Anzahlen von Zuggarnituren für ihren Betrieb erfordern.

3. Füge deinem Pesp-Modell den Bahnhof Köln Hbf mit Ankunfts- und Abfahrtsereignissen für beide Richtungen hinzu. Die Mindestaufenthaltszeit betrage dabei drei Minuten (Fahrzeiten Frankfurt-Köln 75 min und Köln-Amsterdam 155 min), und die Haltezeit darf um bis zu fünf weitere Minuten ausgeweitet werden, falls sich dadurch beispielsweise zusätzliche Anschlussverbindungen herstellen lassen. Kannst du dein Pesp-Modell aus Teil 2 derart modifizieren, dass weiterhin genau solche Vektoren zulässig bleiben, welche (unter Einhaltung der Mindestumkehrzeit) die kleinere der beiden in Teil 1 identifizierten Anzahlen von Zuggarnituren für ihren Betrieb erfordern?

4. Könntest du auf die Frage aus Teil 3 eine andere Antwort geben, wenn du eine lineare Zielfunktion einsetzen darfst und nach einem *optimalen* Taktfahrplan suchst?
Hinweis: Nutze aus, dass für die entlang von Bögen bestehenden Zeitdauern $x_a := (\pi_j - \pi_i - \ell_a) \bmod T + \ell_a$ ("periodic tensions") die *cycle periodicity property* gilt:

$$\forall C \text{ Kreis in } D\, \exists z \in \mathbb{Z} : \sum_{a\in C^+} x_a - \sum_{a\in C^-} x_a = T \cdot z.$$