Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
B. Sc. Stephan Schwartz

Diskrete Mathematik I (SS 2013)

Übungsblatt 8

Abgabe: Mo, 3. Juni 2013, 12:00 **im Fach von S. Schwartz (Arnimallee 3)**

Aufgabe 1. **10 Punkte**

Reduzieren Sie die folgenden Flußprobleme auf das Max-Flow-Problem der Vorlesung.

a) Der Fluss fliesst von einer Menge von Quellen S zu einer Menge von Senken T.

b) Zusätzlich zu den Bogenkapazitäten sind auch Knotenkapazitäten $c(v)$ gegeben.

Aufgabe 2. **10 Punkte**

Ein Digraph $D = (V, A)$ heißt **k-fach stark bogenzusammenhängend**, wenn für jedes Paar s und t von Knoten und jede Bogenmenge $B \subseteq A$ mit $|B| \leq k - 1$ der Digraph $(V, A \setminus B)$ einen gerichteten st-Weg enthält.

Beweisen Sie den **Satz von Menger (Bogenform)**: Ein Digraph ist genau dann k-fach stark bogenzusammenhängend, wenn es zu jedem Paar s und t von Knoten mindestens k gerichtete st-Wege gibt, die keinen Bogen gemeinsam haben.

Aufgabe 3. **10 Punkte**

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $x \in \mathbb{N}_0^A$ ein ganzzahliger st-Fluß in D vom Wert v. Dann gibt es st-Wege P_i für und gerichtete Kreise C_j in D mit der Eigenschaft

$$x = \sum \chi(P_i) + \sum \chi(C_j)$$

wobei $\chi(P_i) \in \{0, 1\}^A$ bzw. $\chi(C_j) \in \{0, 1\}^A$ jeweils den Inzidenzvektor von P_i bzw. C_j bezeichne.

Aufgabe 4. **10 Punkte**

Beim Successive-Shortest-Path-Algorithmus zur Berechnung eines maximalen Flusses wird der Fluß jeweils entlang augmentierender Wege kürzester Länge (bzgl. der Anzahl an Kanten) erhöht. Für alle Iterationsschritte i und alle Knoten v bezeichne $d^i(v)$ die Länge eines kürzesten augmentierenden (s, v)-Weges. Liegt a auf dem augmentierenden Weg und gilt wenn nach der Augmentation

$$x_a = c_a \qquad \text{oder} \qquad x_a = 0,$$

so nennen wir a durch die Augmentation **saturiert**. Zeigen Sie:

a) $d^i(v) \leq d^{i+1}(v) \quad \forall v \in V$.

b) Jeder Bogen wird höchstens $n/2$ mal saturiert.

c) Der Successive-Shortest-Path-Algorithmus ist polynomial.