

Inhaltsverzeichnis

Überblick	1
1 Elementare partielle Differentialgleichungen	5
1.1 Laplace- und Poisson-Gleichung	5
1.1.1 Randwertprobleme	6
1.1.2 Anfangswertproblem	10
1.1.3 Eigenwertproblem	12
1.2 Diffusionsgleichung	16
1.3 Wellengleichung	19
1.4 Schrödinger-Gleichung	23
1.5 Helmholtz-Gleichung	26
1.5.1 Randwertprobleme	27
1.5.2 Zeitharmonische Differentialgleichungen	28
1.6 Klassifikation	30
1.7 Übungsaufgaben	32
2 Partielle Differentialgleichungen in Naturwissenschaft und Technik	36
2.1 Elektrodynamik	36
2.1.1 Maxwell-Gleichungen	36
2.1.2 Optische Modellhierarchie	40
2.2 Strömungsdynamik	43
2.2.1 Euler-Gleichungen	44
2.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen	47
2.2.3 Prandtlsche Grenzschicht	52
2.2.4 Poröse-Medien-Gleichung	54
2.3 Elastomechanik	55
2.3.1 Grundbegriffe der nichtlinearen Elastomechanik	55
2.3.2 Lineare Elastomechanik	59
2.4 Übungsaufgaben	62
3 Differenzenmethoden für Poisson-Probleme	65
3.1 Diskretisierung des Standardproblems	65
3.1.1 Diskrete Randwertprobleme	66

3.1.2	Diskretes Eigenwertproblem	71
3.2	Approximationstheorie bei äquidistanten Gittern	74
3.2.1	Diskretisierungsfehler in L^2	76
3.2.2	Diskretisierungsfehler in L^∞	80
3.3	Diskretisierung auf nichtäquidistanten Gittern	82
3.3.1	Eindimensionaler Spezialfall	82
3.3.2	Krumme Ränder	84
3.4	Übungsaufgaben	87
4	Galerkin-Methoden	89
4.1	Allgemeines Schema	89
4.1.1	Schwache Lösungen	89
4.1.2	Ritz-Minimierung für Randwertprobleme	92
4.1.3	Rayleigh-Ritz-Minimierung für Eigenwertprobleme	96
4.2	Spektralmethoden	99
4.2.1	Realisierung mit Orthogonalsystemen	99
4.2.2	Approximationstheorie	103
4.2.3	Adaptive Spektralmethoden	107
4.3	Finite-Elemente-Methoden	111
4.3.1	Gitter und Finite-Elemente-Räume	112
4.3.2	Elementare finite Elemente	115
4.3.3	Realisierung finiter Elemente	126
4.4	Approximationstheorie für finite Elemente	133
4.4.1	Randwertprobleme	133
4.4.2	Eigenwertprobleme	136
4.4.3	Winkelbedingung für nichtuniforme Gitter	141
4.5	Übungsaufgaben	145
5	Numerische Lösung linearer elliptischer Gittergleichungssysteme	149
5.1	Direkte Eliminationsmethoden	150
5.1.1	Symbolische Faktorisierung	151
5.1.2	Frontenlöser	154
5.2	Matrixzerlegungsmethoden	156
5.2.1	Jacobi-Verfahren	158
5.2.2	Gauß-Seidel-Verfahren	161
5.3	Verfahren der konjugierten Gradienten	163
5.3.1	CG-Verfahren als Galerkin-Methode	163
5.3.2	Vorkonditionierung	167
5.3.3	Adaptive PCG-Verfahren	171
5.3.4	Eine CG-Variante für Eigenwertprobleme	173
5.4	Glättungseigenschaft iterativer Lösungsverfahren	178
5.4.1	Illustration am Poisson-Modellproblem	179

5.4.2	Spektralanalyse für Jacobi-Verfahren	182
5.4.3	Glättungssätze	183
5.5	Hierarchische iterative Löser	189
5.5.1	Klassische Mehrgittermethoden	190
5.5.2	Hierarchische-Basis-Methode	198
5.6	Übungsaufgaben	202
6	Konstruktion adaptiver hierarchischer Gitter	205
6.1	A-posteriori-Fehlerschätzer	205
6.1.1	Residuenbasierte Fehlerschätzer	209
6.1.2	Dreiecksorientierte Fehlerschätzer	214
6.1.3	Gradienten-Verbesserung	219
6.1.4	Hierarchische Fehlerschätzer	223
6.1.5	Zielorientierte Fehlerschätzung	225
6.2	Adaptive Gitterverfeinerung	227
6.2.1	Äquilibrierung lokaler Diskretisierungsfehler	227
6.2.2	Verfeinerungsstrategien	233
6.2.3	Struktur adaptiver hierarchischer Löser	237
6.3	Konvergenz auf adaptiven Gittern	238
6.3.1	Ein Konvergenzbeweis	238
6.3.2	Ein Beispiel mit einspringenden Ecken	240
6.4	Entwurf eines Plasmon-Polariton-Wellenleiters	244
6.5	Übungsaufgaben	249
7	Adaptive Mehrgittermethoden für lineare elliptische Probleme	251
7.1	Unterraum-Korrekturmethode	252
7.1.1	Prinzip	253
7.1.2	Sequentielle Unterraum-Korrekturmethode	255
7.1.3	Parallele Unterraum-Korrekturmethode	261
7.1.4	Überlappende Gebietszerlegung	265
7.1.5	Finite Elemente höherer Ordnung	272
7.2	Hierarchische Raumzerlegungen	278
7.2.1	Zerlegung in hierarchische Basen	278
7.2.2	L^2 -orthogonale Zerlegung: BPX	285
7.3	Randwertprobleme	289
7.3.1	Additive Mehrgittermethoden	289
7.3.2	Multiplikative Mehrgittermethoden	294
7.3.3	Kaskadische Mehrgittermethoden	296
7.4	Eigenwertprobleme	305
7.4.1	Lineare Mehrgittermethode	306
7.4.2	Rayleigh-Quotienten-Mehrgittermethode	308
7.5	Übungsaufgaben	312

8	Adaptive Lösung nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme	315
8.1	Diskrete Newton-Methoden für nichtlineare Gittergleichungssysteme .	316
8.1.1	Exakte Newton-Methoden	318
8.1.2	Inexakte Newton-PCG-Methoden	321
8.2	Inexakte Newton-Mehrgitter-Methoden	324
8.2.1	Hierarchische Gittergleichungssysteme	325
8.2.2	Realisierung des adaptiven Algorithmus	327
8.2.3	Ein elliptisches Problem ohne Lösung	331
8.3	Operationsplanung in der Mund-Kiefer-Gesichtschirurgie	334
8.4	Übungsaufgaben	337
9	Adaptive Integration parabolischer Anfangsrandwertprobleme	338
9.1	Zeitdiskretisierung bei steifen Differentialgleichungen	338
9.1.1	Lineare Stabilitätstheorie	339
9.1.2	Linear-implizite Einschrittverfahren	344
9.1.3	Ordnungsreduktion	355
9.2	Raum-Zeit-Diskretisierung bei parabolischen Differentialgleichungen	361
9.2.1	Adaptive Linienmethode	362
9.2.2	Adaptive Zeitschichtenmethode	371
9.2.3	Zielorientierte Fehlerschätzung	382
9.3	Elektrische Erregung des Herzmuskels	384
9.3.1	Mathematische Modelle	385
9.3.2	Numerische Simulation	387
9.4	Übungsaufgaben	389
A	Anhang	391
A.1	Fourieranalyse und Fouriertransformation	391
A.2	Differentialoperatoren im \mathbb{R}^3	392
A.3	Integralsätze	394
A.4	Delta-Distribution und Greensche Funktionen	398
A.5	Sobolevräume	403
A.6	Optimalitätsbedingungen	409
	Software	410
	Literatur	412
	Index	426