Inhaltsverzeichnis

Überblick 1

1 Elementare partielle Differentialgleichungen 5
1.1 Laplace- und Poisson-Gleichung 5
1.1.1 Randwertprobleme 6
1.1.2 Anfangswertproblem 10
1.1.3 Eigenwertproblem 12
1.2 Diffusionsgleichung 16
1.3 Wellengleichung 19
1.4 Schrödinger-Gleichung 23
1.5 Helmholtz-Gleichung 26
1.5.1 Randwertprobleme 27
1.5.2 Zeitharmonische Differentialgleichungen 28
1.6 Klassifikation 30
1.7 Übungsaufgaben 32

2 Partielle Differentialgleichungen in Naturwissenschaft und Technik 36
2.1 Elektrodynamik 36
2.1.1 Maxwell-Gleichungen 36
2.1.2 Optische Modellhierarchie 40
2.2 Strömungsdynamik 43
2.2.1 Euler-Gleichungen 44
2.2.2 Navier-Stokes-Gleichungen 47
2.2.3 Prandtlsche Grenzschicht 52
2.2.4 Poröse-Medien-Gleichung 54
2.3 Elastomechanik 55
2.3.1 Grundbegriffe der nichtlinearen Elastomechanik 55
2.3.2 Lineare Elastomechanik 59
2.4 Übungsaufgaben 62

3 Differenzenmethoden für Poisson-Probleme 65
3.1 Diskretisierung des Standardproblems 65
3.1.1 Diskrete Randwertprobleme 66

3.1.2 Diskretes Eigenwertproblem . . . 71
3.2 Approximationstheorie bei äquidistanten Gittern . . . 74
3.2.1 Diskretisierungsfehler in L^2 . . . 76
3.2.2 Diskretisierungsfehler in L^∞ . . . 80
3.3 Diskretisierung auf nichtäquidistanten Gittern . . . 82
3.3.1 Eindimensionaler Spezialfall . . . 82
3.3.2 Krumme Ränder . . . 84
3.4 Übungsaufgaben . . . 87

4 Galerkin-Methoden 89
4.1 Allgemeines Schema . . . 89
4.1.1 Schwache Lösungen . . . 89
4.1.2 Ritz-Minimierung für Randwertprobleme . . . 92
4.1.3 Rayleigh-Ritz-Minimierung für Eigenwertprobleme . . . 96
4.2 Spektralmethoden . . . 99
4.2.1 Realisierung mit Orthogonalsystemen . . . 99
4.2.2 Approximationstheorie . . . 103
4.2.3 Adaptive Spektralmethoden . . . 107
4.3 Finite-Elemente-Methoden . . . 111
4.3.1 Gitter und Finite-Elemente-Räume . . . 112
4.3.2 Elementare finite Elemente . . . 115
4.3.3 Realisierung finiter Elemente . . . 126
4.4 Approximationstheorie für finite Elemente . . . 133
4.4.1 Randwertprobleme . . . 133
4.4.2 Eigenwertprobleme . . . 136
4.4.3 Winkelbedingung für nichtuniforme Gitter . . . 141
4.5 Übungsaufgaben . . . 145

5 Numerische Lösung linearer elliptischer Gittergleichungssysteme 149
5.1 Direkte Eliminationsmethoden . . . 150
5.1.1 Symbolische Faktorisierung . . . 151
5.1.2 Frontenlöser . . . 154
5.2 Matrixzerlegungsmethoden . . . 156
5.2.1 Jacobi-Verfahren . . . 158
5.2.2 Gauß-Seidel-Verfahren . . . 161
5.3 Verfahren der konjugierten Gradienten . . . 163
5.3.1 CG-Verfahren als Galerkin-Methode . . . 163
5.3.2 Vorkonditionierung . . . 167
5.3.3 Adaptive PCG-Verfahren . . . 171
5.3.4 Eine CG-Variante für Eigenwertprobleme . . . 173
5.4 Glättungseigenschaft iterativer Lösungsverfahren . . . 178
5.4.1 Illustration am Poisson-Modellproblem . . . 179

5.4.2 Spektralanalyse für Jacobi-Verfahren . . . 182
5.4.3 Glättungssätze . . . 183
5.5 Hierarchische iterative Löser . . . 189
5.5.1 Klassische Mehrgittermethoden . . . 190
5.5.2 Hierarchische-Basis-Methode . . . 198
5.6 Übungsaufgaben . . . 202

6 Konstruktion adaptiver hierarchischer Gitter 205
6.1 A-posteriori-Fehlerschätzer . . . 205
6.1.1 Residuenbasierte Fehlerschätzer . . . 209
6.1.2 Dreiecksorientierte Fehlerschätzer . . . 214
6.1.3 Gradienten-Verbesserung . . . 219
6.1.4 Hierarchische Fehlerschätzer . . . 223
6.1.5 Zielorientierte Fehlerschätzung . . . 225
6.2 Adaptive Gitterverfeinerung . . . 227
6.2.1 Äquilibrierung lokaler Diskretisierungsfehler . . . 227
6.2.2 Verfeinerungsstrategien . . . 233
6.2.3 Struktur adaptiver hierarchischer Löser . . . 237
6.3 Konvergenz auf adaptiven Gittern . . . 238
6.3.1 Ein Konvergenzbeweis . . . 238
6.3.2 Ein Beispiel mit einspringenden Ecken . . . 240
6.4 Entwurf eines Plasmon-Polariton-Wellenleiters . . . 244
6.5 Übungsaufgaben . . . 249

7 Adaptive Mehrgittermethoden für lineare elliptische Probleme 251
7.1 Unterraum-Korrekturmethoden . . . 252
7.1.1 Prinzip . . . 253
7.1.2 Sequentielle Unterraum-Korrekturmethoden . . . 255
7.1.3 Parallele Unterraum-Korrekturmethoden . . . 261
7.1.4 Überlappende Gebietszerlegung . . . 265
7.1.5 Finite Elemente höherer Ordnung . . . 272
7.2 Hierarchische Raumzerlegungen . . . 278
7.2.1 Zerlegung in hierarchische Basen . . . 278
7.2.2 L^2-orthogonale Zerlegung: BPX . . . 285
7.3 Randwertprobleme . . . 289
7.3.1 Additive Mehrgittermethoden . . . 289
7.3.2 Multiplikative Mehrgittermethoden . . . 294
7.3.3 Kaskadische Mehrgittermethoden . . . 296
7.4 Eigenwertprobleme . . . 305
7.4.1 Lineare Mehrgittermethode . . . 306
7.4.2 Rayleigh-Quotienten-Mehrgittermethode . . . 308
7.5 Übungsaufgaben . . . 312

8 Adaptive Lösung nichtlinearer elliptischer Randwertprobleme 315
8.1 Diskrete Newton-Methoden für nichtlineare Gittergleichungssysteme . 316
8.1.1 Exakte Newton-Methoden 318
8.1.2 Inexakte Newton-PCG-Methoden 321
8.2 Inexakte Newton-Mehrgitter-Methoden 324
8.2.1 Hierarchische Gittergleichungssysteme 325
8.2.2 Realisierung des adaptiven Algorithmus 327
8.2.3 Ein elliptisches Problem ohne Lösung 331
8.3 Operationsplanung in der Mund-Kiefer-Gesichtschirurgie 334
8.4 Übungsaufgaben 337

9 Adaptive Integration parabolischer Anfangsrandwertprobleme 338
9.1 Zeitdiskretisierung bei steifen Differentialgleichungen 338
9.1.1 Lineare Stabilitätstheorie 339
9.1.2 Linear-implizite Einschrittverfahren 344
9.1.3 Ordnungsreduktion 355
9.2 Raum-Zeit-Diskretisierung bei parabolischen Differentialgleichungen 361
9.2.1 Adaptive Linienmethode 362
9.2.2 Adaptive Zeitschichtenmethode 371
9.2.3 Zielorientierte Fehlerschätzung 382
9.3 Elektrische Erregung des Herzmuskels 384
9.3.1 Mathematische Modelle 385
9.3.2 Numerische Simulation 387
9.4 Übungsaufgaben 389

A Anhang 391
A.1 Fourieranalyse und Fouriertransformation 391
A.2 Differentialoperatoren im $\mathbb{R}^3$ 392
A.3 Integralsätze 394
A.4 Delta-Distribution und Greensche Funktionen 398
A.5 Sobolevräume 403
A.6 Optimalitätsbedingungen 409

Software 410

Literatur 412

Index 426