Überblick

Dieses einführende Lehrbuch richtet sich in erster Linie an Studierende der Mathematik, der Informatik, der Natur– und Ingenieurwissenschaften. In zweiter Linie wendet es sich jedoch ausdrücklich auch an bereits im Beruf stehende Kollegen oder Quereinsteiger aus anderen Disziplinen, die sich mit den moderneren Konzepten der Numerischen Mathematik auf elementarer Ebene im Selbststudium vertraut machen wollen.

Das Buch gliedert sich in neun Kapitel mit dazugehörigen Übungsaufgaben, ein Softwareverzeichnis, ein Literaturverzeichnis und einen Index. Die ersten fünf und die letzten vier Kapitel sind inhaltlich eng verknüpft.

In **Kapitel 1** beginnen wir mit der *Gauß–Elimination* für lineare Gleichungssysteme als dem klassischen Musterfall eines Algorithmus. Über die elementare Elimination hinaus diskutieren wir Pivotstrategien und Nachiteration als Zusatzelemente. **Kapitel 2** enthält die unverzichtbare *Fehleranalyse*, fußend auf den Grundgedanken von Wilkinson. Kondition eines Problems und Stabilität eines Algorithmus werden einheitlich dargestellt, sauber auseinandergehalten und zunächst an einfachen Beispielen illustriert. Die leider noch allzu oft übliche ϵ–Schlacht im Rahmen der linearisierten Fehlertheorie können wir vermeiden — was zu einer drastischen Vereinfachung in der Darstellung und im Verständnis führt. Als Besonderheit ergibt sich ein Stabilitätsindikator, der eine kompakte Klassifikation der numerischen Stabilität gestattet. Mit diesem Rüstzeug können wir schließlich die Frage, wann eine gegebene Näherungslösung eines linearen Gleichungssystems akzeptabel ist, algorithmisch beantworten. In **Kapitel 3** behandeln wir Orthogonalisierungsverfahren im Zusammenhang mit der Gauß'schen *linearen Ausgleichsrechnung* und führen den äußerst nützlichen Kalkül der Pseudoinversen ein. Er findet im anschließenden **Kapitel 4** unmittelbar Anwendung. Dort stellen wir Iterationsverfahren für nichtlineare Gleichungssysteme (*Newton–Verfahren*), nichtlineare Ausgleichsprobleme (*Gauß–Newton–Verfahren*) und parameterabhängige Probleme (*Fortsetzungsmethoden*) in engem inneren Zusammenhang dar. Besondere Aufmerksamkeit widmen wir der modernen affin–invarianten Form von Konvergenztheorie und iterativen Algorithmen. **Kapitel 5** beginnt mit der Konditionsanalyse des *linearen Eigenwertproblems* für allgemeine Matrizen. Dies richtet das Augenmerk zunächst in natürlicher Weise auf den reell–symmetrischen Fall: für diesen Fall stellen wir Vektoriteration und QR–Algorithmus im Detail vor. In den gleichen Zusammenhang paßt auch die in den Anwendungen so wichtige Singulärwertzerlegung für allgemeine Matrizen. Abschließend betrachten wir stochastische Eigenwertprobleme, die in der dritten Auflage neu hinzugekommen sind. Sie spielen insbesondere in der sogenannten Clusteranalyse in letzter Zeit eine zunehmend wichtige Rolle.

Die zweite inhaltlich geschlossene Sequenz beginnt in **Kapitel 6** mit einer ausführlichen Behandlung der Theorie von *Drei–Term–Rekursionen*, die bei der Realisierung von Orthogonalprojektionen in Funktionenräumen eine Schlüsselrolle spielen. Die Kondition von Drei–Term–Rekursionen stellen wir anhand der diskreten Greenschen Funktionen dar und bereiten so eine mathematische Struktur vor, die in Anfangs– und Randwertproblemen bei Differentialgleichungen wiederkehrt. Mit dem verstärkten Aufkommen des symbolischen Rechnens hat sich gerade in letzter Zeit das Interesse an *Speziellen Funktionen* auch in der Numerik wiederbelebt. Numerische Algorithmen für ihre effiziente Summation über die zugehörigen Drei–Term–Rekursionen illustrieren wir am Beispiel der Kugel– und Besselfunktionen. In **Kapitel 7** behandeln wir zunächst die klassische polynomielle *Interpolation* und *Approximation* im eindimensionalen Fall. Wir führen sie sodann weiter über Bézier–Technik und Splines bis hin zu Methoden, die heute im CAD (Computer Aided Design) oder CAGD (Computer Aided Geometric Design), also in Disziplinen der Computergraphik, von zentraler Bedeutung sind. Unsere Darstellung in **Kapitel 8** über *iterative* Methoden zur Lösung von *großen* symmetrischen Gleichungssystemen stützt sich in bequemer Weise auf Kapitel 6 (Drei–Term–Rekursion) und Kapitel 7 (Minimaxeigenschaft von Tschebyscheff–Polynomen). Das gleiche gilt für den Lanczos–Algorithmus für große symmetrische Eigenwertprobleme.

Das abschließende **Kapitel 9** ist mit voller Absicht etwas länger geraten: Es trägt den Hauptteil der Last, Prinzipien der numerischen Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen vorab ohne technischen Ballast am einfachst möglichen Problemtyp vorzustellen, hier also an der numerischen Quadratur. Nach den historischen Newton–Cotes–Formeln und der Gauß–Quadratur stellen wir die klassische Romberg–Quadratur als einen ersten adaptiven Algorithmus dar, bei dem jedoch nur die Approximationsordnung variabel ist. Die Formulierung des Quadraturproblems als *Anfangswertproblem* bietet uns sodann die Möglichkeit, eine *adaptive Romberg–Quadratur* mit Ordnungs– *und* Schrittweitensteuerung auszuarbeiten; dies liefert uns zugleich den didaktischen Einstieg in adaptive *Extrapolationsverfahren*, die bei der Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen eine tragende Rolle spielen. Die alternative Formulierung des Quadraturproblems als *Randwertproblem* nutzen wir zur Herleitung einer *adaptiven Mehrgitter–Quadratur*; auf diese Weise stellen wir das adaptive Prinzip bei Mehrgittermethoden für partielle Differentialgleichungen separiert vom Prinzip der schnellen Lösung am einfachsten Modellfall dar.