1

Graphen, Hypergraphen, Matroide: wichtige Definitionen und Bezeichnungen

Prof. Dr. Martin Grötschel 3. Januar 2001

Bei der nachfolgenden Zusammenstellung von Begriffen und Bezeichnungen aus der Graphen-, Hypergraphen- und Matroidtheorie handelt es sich nicht um eine didaktische Einführung in das Gebiet der diskreten Mathematik. Dieses Kapitel ist lediglich als Nachschlagewerk gedacht, in dem die wichtigsten Begriffe und Bezeichnungen zusammengefaßt und definiert sind.

1.1 Grundbegriffe der Graphentheorie

Die Terminologie und Notation in der Graphentheorie ist leider sehr uneinheitlich. Wir wollen daher hier einen kleinen Katalog wichtiger graphentheoretischer Begriffe und Bezeichnungen zusammenstellen und zwar in der Form, wie sie (in der Regel) in meinen Vorlesungen benutzt werden. Definitionen werden durch Fettdruck hervorgehoben. Nach einer Definition folgen gelegentlich (in Klammern) weitere Bezeichnungen, um auf alternative Namensgebungen in der Literatur hinzuweisen.

Es gibt sehr viele Bücher über Graphentheorie. Wenn man zum Beispiel in der Datenbank MATH des Zentralblattes für Mathematik nach Büchern sucht, die den Begriff "graph theory" im Titel enthalten, erhält man fast 250 Verweise. Bei rund 50 Büchern taucht das Wort "Graphentheorie" im Titel auf. Ich kenne natürlich nicht alle dieser Bücher. Zur Einführung in die mathematische Theorie empfehle ich u. a. Aigner (1984), Bollobás (1998), Diestel (2000), Bondy und Murty (1976) und West (2000). Stärker algorithmisch orientiert und anwendungsbezogen sind z. B. Ebert (1981), Golombic (1980), Jungnickel (1994) und Walther und Nägler (1987).

1.2 Graphen

Ein **Graph** G ist ein Tripel (V, E, Ψ) bestehend aus einer nicht-leeren Menge V, einer Menge E und einer **Inzidenzfunktion** $\Psi : E \to V^{(2)}$. Hierbei bezeichnet $V^{(2)}$ die Menge der ungeordneten Paare von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Elementen von V. Ein Element aus V heißt **Knoten** (oder Ecke oder Punkt oder Knotenpunkt; englisch: vertex oder node oder point), ein Element aus E heißt **Kante** (englisch: edge oder line). Zu jeder Kante $e \in E$ gibt es also Knoten $u, v \in V$ mit $\Psi(e) = uv = vu$. (In der Literatur werden auch die Symbole $[u, v]$ oder $\{u, v\}$ zur Bezeichnung des ungeordneten Paares uv benutzt. Wir lassen zur Bezeichnungsvereinfachung die Klammern weg, es sei denn, dies führt zu unklarer Notation. Zum Beispiel bezeichnen wir die Kante zwischen Knoten 1 und Knoten 23 nicht mit 123, wir schreiben dann

$\{1, 23\}$.)

Die Anzahl der Knoten eines Graphen heißt **Ordnung** des Graphen. Ein Graph heißt **endlich**, wenn V und E endliche Mengen sind, andernfalls heißt G **unendlich**. Wir werden uns nur mit endlichen Graphen beschäftigen und daher ab jetzt statt "endlicher Graph" einfach "Graph" schreiben. Wie werden versuchen, die natürliche Zahl n für die Knotenzahl und die natürliche Zahl m für die Kantenzahl eines Graphen zu reservieren. (Das gelingt wegen der geringen Anzahl der Buchstaben unseres Alphabets nicht immer.)

Gilt $\Psi(e) = uv$ für eine Kante $e \in E$, dann heißen die Knoten $u, v \in V$ **Endknoten** von e, und wir sagen, daß u und v mit e **inzidieren** oder **auf** e **liegen**, daß e die Knoten u und v **verbindet**, und daß u und v **Nachbarn** bzw. **adjazent** sind. Wir sagen auch, daß zwei Kanten **inzident** sind, wenn sie einen gemeinsamen Endknoten haben. Eine Kante e mit $\Psi(e) = uu$ heißt **Schlinge**; Kanten e, f mit $\Psi(e) = uv = \Psi(f)$ heißen **parallel**, man sagt in diesem Falle auch, daß die Knoten u und v durch eine **Mehrfachkante** verbunden sind. Graphen, die weder Mehrfachkanten noch Schlingen enthalten, heißen **einfach**. Der einfache Graph, der zu jedem in G adjazenten Knotenpaar u, v mit $u \neq v$ genau eine u und v verbindende Kante enthält, heißt der G **unterliegende einfache Graph**. Mit $\Gamma(v)$ bezeichnen wir die Menge der Nachbarn eines Knotens v. Falls v in einer Schlinge enthalten ist, ist v natürlich mit sich selbst benachbart. $\Gamma(W) := \bigcup_{v \in W} \Gamma(v)$ ist die Menge der Nachbarn von $W \subseteq V$. Ein Knoten ohne Nachbarn heißt **isoliert**.

Die Benutzung der Inzidenzfunktion Ψ führt zu einem relativ aufwendigen Formalimus. Wir wollen daher die Notation etwas vereinfachen. Dabei entstehen zwar im Falle von nicht-einfachen Graphen gelegentlich Mehrdeutigkeiten, die aber i. a. auf offensichtliche Weise interpretiert werden können. Statt $\Psi(e) = uv$ schreiben wir von nun an einfach $e = uv$ (oder äquivalent $e = vu$) und meinen damit die Kante e mit den Endknoten u und v. Das ist korrekt, solange es nur eine Kante zwischen u und v gibt. Gibt es mehrere Kanten mit den Endknoten u und v, und sprechen wir von der Kante uv, so soll das heißen, daß wir einfach eine der parallelen Kanten auswählen. Von jetzt an vergessen wir also die Inzidenzfunktion Ψ und benutzen die Abkürzung $G = (V, E)$, um einen Graphen zu bezeichnen. Manchmal schreiben wir auch E_G oder $E(G)$ bzw. V_G oder $V(G)$ zur Bezeichnung der Kanten- bzw. Knotenmenge eines Graphen G.

Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : V \to W$ gibt, so daß $uv \in E$ genau dann gilt, wenn $\varphi(u)\varphi(v) \in F$ gilt. Isomorphe Graphen sind also — bis auf die Benamung der Knoten und Kanten — identisch.

Eine Menge F von Kanten heißt **Schnitt**, wenn es eine Knotenmenge $W \subseteq V$ gibt, so daß $F = \delta(W) := \{uv \in E \mid u \in W, v \in V \setminus W\}$ gilt; manchmal wird $\delta(W)$ der **durch** W **induzierte Schnitt** genannt. Statt $\delta(\{v\})$ schreiben wir kurz $\delta(v)$. Ein Schnitt, der keinen anderen nicht-leeren Schnitt als echte Teilmenge enthält, heißt **Cokreis**. Wollen wir betonen, daß ein Schnitt $\delta(W)$ bezüglich zweier Knoten $s, t \in V$ die Eigenschaft $s \in W$ und $t \in V \setminus W$ hat, so sagen wir, $\delta(W)$ ist ein $\boldsymbol{s}$ **und** $\boldsymbol{t}$ **trennender Schnitt** oder kurz ein $[\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}]$**-Schnitt**.

Generell benutzen wir die eckigen Klammern $[.\ ,\ .]$, um anzudeuten, daß die Reihenfolge der Objekte in der Klammer ohne Bedeutung ist. Z. B. ist ein $[s, t]$-Schnitt natürlich auch ein $[t, s]$-Schnitt, da ja $\delta(W) = \delta(V \setminus W)$ gilt.

Wir haben oben Bezeichnungen wie $\Gamma(v)$ oder $\delta(W)$ eingeführt unter der stillschweigenden Voraussetzung, daß man weiß, bezüglich welches Graphen diese Mengen definiert sind. Sollten mehrere Graphen involviert sein, so werden wir, wenn Zweideutigkeiten auftreten können, die Graphennamen als Indizes verwenden, also z. B. $\Gamma_G(v)$ oder $\delta_G(V)$ schreiben. Analog wird bei allen anderen Symbolen verfahren.

Der **Grad** (oder die Valenz) eines Knotens v (Bezeichnung: $\deg(\mathbf{v})$) ist die Anzahl der Kanten, mit denen er inzidiert, wobei Schlingen doppelt gezählt werden. Hat ein Graph keine Schlingen, so ist der Grad von v gleich $|\delta(v)|$. Ein Graph heißt **k-regulär**, wenn jeder Knoten den Grad k hat, oder kurz **regulär**, wenn der Grad k nicht hervorgehoben werden soll.

Sind W eine Knotenmenge und F eine Kantenmenge in $G = (V, E)$, dann bezeichnen wir mit $E(W)$ die Menge aller Kanten von G mit beiden Endknoten in W und mit $V(F)$ die Menge aller Knoten, die Endknoten mindestens einer Kante aus F sind.

Sind $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ zwei Graphen, so heißt der Graph $(V \cup W, E \cup F)$ die **Vereinigung** von G und H, und $(V \cap W, E \cap F)$ heißt der **Durchschnitt** von G und H. G und H heißen **disjunkt**, falls $V \cap W = \emptyset$, **kantendisjunkt**, falls $E \cap F = \emptyset$. Wir sprechen von einer **disjunkten** bzw. **kantendisjunkten Vereinigung** von zwei Graphen, wenn sie disjunkt bzw. kantendisjunkt sind.

Sind $G = (V, E)$ und $H = (W, F)$ Graphen, so daß $W \subseteq V$ und $F \subseteq E$ gilt, so heißt H **Untergraph** (oder Teilgraph) von G. Falls $W \subseteq V$, so bezeichnet $G - W$ den Graphen, den man durch **Entfernen** (oder Subtrahieren) aller Knoten in W und aller Kanten mit mindestens einem Endknoten in W gewinnt. $G[W] := G - (V \setminus W)$ heißt der **von W induzierte Untergraph** von G. Es gilt also $G[W] = (W, E(W))$. Für $F \subseteq E$ ist $G - F := (V, E \setminus F)$ der Graph, den man durch **Entfernen** (oder Subtrahieren) der Kantenmenge F enthält. Statt $G - \{f\}$ schreiben wir $G - f$, analog schreiben wir $G - w$ statt $G - \{w\}$ für $w \in V$. Ein Untergraph $H = (W, F)$ von $G = (V, E)$ heißt **aufspannend**, falls $V = W$ gilt.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph und $W \subseteq V$ eine Knotenmenge, so bezeichnen wir mit $G \cdot W$ den Graphen, der durch **Kontraktion der Knotenmenge** W entsteht. Das heißt, die Knotenmenge von $G \cdot W$ besteht aus den Knoten $V \setminus W$ und einem neuen Knoten w, der die Knotenmenge W ersetzt. Die Kantenmenge von $G \cdot W$ enthält alle Kanten von G, die mit keinem Knoten aus W inzidieren, und alle Kanten, die genau einen Endknoten in W haben, aber dieser Endknoten wird durch w ersetzt (also können viele parallele Kanten entstehen). Keine der Kanten von G, die in $E(W)$ liegen, gehört zu $G \cdot W$. Falls $e = uv \in E$ und falls G keine zu e parallele Kante enthält, dann ist der Graph, der durch **Kontraktion der Kante** e entsteht (Bezeichnung $G \cdot e$), der Graph $G \cdot \{u, v\}$. Falls G zu e parallele Kanten enthält, so erhält man $G \cdot e$ aus $G \cdot \{u, v\}$ durch Addition von so vielen Schlingen, die den neuen Knoten w enthalten, wie es Kanten in G parallel zu e gibt. Der Graph $G \cdot F$, den man durch **Kontraktion einer Kantenmenge** $F \subseteq E$ erhält, ist der Graph, der durch sukzessive Kontraktion (in beliebiger Reihenfolge) der Kanten aus F gewonnen wird. Ist e eine Schlinge von G, so sind $G \cdot e$ und $G - e$ identisch.

Ein einfacher Graph heißt **vollständig**, wenn jedes Paar seiner Knoten durch eine Kante verbunden ist. Offenbar gibt es — bis auf Isomorphie — nur einen vollständigen Graphen mit n Knoten. Dieser wird mit K_n bezeichnet. Ein Graph G, dessen Knotenmenge V in zwei disjunkte nicht-leere Teilmengen V_1, V_2 mit $V_1 \cup V_2 = V$ zerlegt werden kann, so daß keine zwei Knoten in V_1 und keine zwei Knoten in V_2 benachbart sind, heißt **bipartit** (oder paar). Die Knotenmengen V_1, V_2 nennt man eine **Bipartition** (oder 2-Färbung) von G. Falls G zu je zwei Knoten $u \in V_1$ und $v \in V_2$ genau eine Kante uv enthält, so nennt man G **vollständig bipartit**. Den — bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten — vollständig bipartiten Graphen mit $|V_1| = m, |V_2| = n$ bezeichnen wir mit $K_{m,n}$.

Ist G ein Graph, dann ist das **Komplement** von G, bezeichnet mit $\overline{G}$, der einfache Graph, der dieselbe Knotenmenge wie G hat und bei dem zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie in G nicht benachbart sind. Ist G einfach, so gilt $\overline{\overline{G}} = G$. Der **Kantengraph** (englisch: line graph) $L(G)$ eines Graphen G ist der einfache Graph, dessen Knotenmenge die Kantenmenge von G ist und bei dem zwei Knoten genau dann adjazent sind, wenn die zugehörigen Kanten in G einen gemeinsamen Endknoten haben.

Eine **Clique** in einem Graphen G ist eine Knotenmenge Q, so daß je zwei Knoten aus Q in G benachbart sind. Eine **stabile Menge** in einem Graphen G ist eine Knotenmenge S, so daß je zwei Knoten aus S in G nicht benachbart sind. Für stabile Mengen werden auch die Begriffe unabhängige Knotenmenge oder Coclique verwendet. Eine Knotenmenge K in G heißt **Knotenüberdeckung** (oder Überdeckung von Kanten durch Knoten), wenn jede Kante aus G mit mindestens einem Knoten in K inzidiert. Die größte Kardinalität (= Anzahl der Elemente) einer stabilen Menge (bzw. Clique) in einem Graphen bezeichnet man mit $\alpha(\mathbf{G})$ (bzw. $\omega(\mathbf{G})$); die kleinste Kardinalität einer Knotenüberdeckung mit $\tau(\mathbf{G})$.

Eine Kantenmenge M in G heißt **Matching** (oder Paarung oder Korrespondenz oder unabhängige Kantenmenge), wenn M keine Schlingen enthält und je zwei Kanten in M keinen gemeinsamen Endknoten besitzen. M heißt **perfekt**, wenn jeder Knoten von G Endknoten einer Kante des Matchings M ist. Ein perfektes Matching wird auch **1-Faktor** genannt. Eine Kantenmenge F in G heißt k**-Faktor**, wenn jeder Knoten von G in genau k Kanten aus F enthalten ist. Eine **Kantenüberdeckung** (oder Überdeckung von Knoten durch Kanten) ist eine Kantenmenge, so daß jeder Knoten aus G mit mindestens einer Kante dieser Menge inzidiert. Die größte Kardinalität eines Matchings in G bezeichnet man mit $\nu(G)$, die kleinste Kardinalität einer Kantenüberdeckung mit $\rho(G)$.

Eine Zerlegung der Knotenmenge eines Graphen in stabile Mengen, die sogenannten **Farbklassen**, heißt **Knotenfärbung**; d. h. die Knoten werden so gefärbt, daß je zwei benachbarte Knoten eine unterschiedliche Farbe haben. Eine Zerlegung der Kantenmenge in Matchings heißt **Kantenfärbung**; die Kanten werden also so gefärbt, daß je zwei inzidente Kanten verschieden gefärbt sind. Eine Zerlegung der Knotenmenge von G in Cliquen heißt **Cliquenüberdeckung** von G. Die minimale Anzahl von stabilen Mengen (bzw. Cliquen) in einer Knotenfärbung (bzw. Cliquenüberdeckung) bezeichnet man mit $\chi(\mathbf{G})$ (bzw. $\overline{\chi}(\mathbf{G})$), die minimale Anzahl von Matchings in einer Kantenfärbung mit $\gamma(\mathbf{G})$. Die Zahl $\gamma(G)$ heißt **chromatischer Index** (oder Kantenfärbungszahl), $\chi(G)$ **Färbungszahl** (oder Knotenfärbungszahl oder chromatische Zahl).

Ein Graph $G = (V, E)$ kann in die Ebene gezeichnet werden, indem man jeden Knoten durch einen Punkt repräsentiert und jede Kante durch eine Kurve (oder Linie oder Streckenstück), die die beiden Punkte verbindet, die die Endknoten der Kante repräsentieren. Ein Graph heißt **planar** (oder plättbar), falls er in die Ebene gezeichnet werden kann, so daß sich keine zwei

Kanten (d. h. die sie repräsentierenden Kurven) schneiden — außer möglicherweise in ihren Endknoten. Eine solche Darstellung eines planaren Graphen G in der Ebene nennt man auch **Einbettung** von G in die Ebene.

1.3 Digraphen

Die Kanten eines Graphen haben keine Orientierung. In vielen Anwendungen spielen aber Richtungen eine Rolle. Zur Modellierung solcher Probleme führen wir gerichtete Graphen ein. Ein **Digraph** (oder **gerichteter Graph**) $D = (V, A)$ besteht aus einer (endlichen) nicht-leeren **Knotenmenge** V und einer (endlichen) Menge A von **Bögen** (oder gerichteten Kanten; englisch: arc). Eine **Bogen** a ist ein geordnetes Paar von Knoten, also $a = (u, v)$, u ist der **Anfangs-** oder **Startknoten**, v der **End-** oder **Zielknoten** von a; u heißt **Vorgänger** von v, v **Nachfolger** von u, a **inzidiert mit** u und v. (Um exakt zu sein, müßten wir hier ebenfalls eine Inzidenzfunktion $\Psi = (t, h) : A \to V \times V$ einführen. Für einen Bogen $a \in A$ ist dann $t(a)$ der Anfangsknoten (englisch: tail) und $h(a)$ der Endknoten (englisch: head) von a. Aus den bereits oben genannten Gründen wollen wir jedoch die Inzidenzfunktion nur in Ausnahmefällen benutzen.) Wie bei Graphen gibt es auch hier **parallele Bögen** und **Schlingen**. Die Bögen (u, v) und (v, u) heißen **antiparallel**.

In manchen Anwendungsfällen treten auch "Graphen" auf, die sowohl gerichtete als auch ungerichtete Kanten enthalten. Wir nennen solche Objekte **gemischte Graphen** und bezeichnen einen gemischten Graphen mit $G = (V, E, A)$, wobei V die Knotenmenge, E die Kantenmenge und A die Bogenmenge von G bezeichnet.

Falls $D = (V, A)$ ein Digraph ist und $W \subseteq V, B \subseteq A$, dann bezeichnen wir mit $A(W)$ die Menge der Bögen, deren Anfangs- und Endknoten in W liegen, und mit $V(B)$ die Menge der Knoten, die als Anfangs- oder Endknoten mindestens eines Bogens in B auftreten. Unterdigraphen, induzierte Unterdigraphen, aufspannende Unterdigraphen, Vereinigung und Durchschnitt von Digraphen, das Entfernen von Bogen- oder Knotenmengen und die Kontraktion von Bogen- oder Knotenmengen sind genau wie bei Graphen definiert.

Ist $D = (V, A)$ ein Digraph, dann heißt der Graph $G = (V, E)$, der für jeden Bogen $(i, j) \in A$ eine Kante ij enthält, der D **unterliegende Graph**. Analog werden der D **unterliegende einfache Graph** und der **unterliegende einfache Digraph** definiert. Wir sagen, daß ein Digraph eine "ungerichtete" Eigenschaft hat, wenn der ihm unterliegende Graph diese Eigenschaft hat (z. B., D ist bipartit oder planar, wenn der D unterliegende Graph G bipartit oder planar ist). Geben wir jeder Kante ij eines Graphen G eine Orientierung, d. h., ersetzen wir ij durch einen der Bögen (i, j) oder (j, i), so nennen wir den so entstehenden Digraphen D **Orientierung** von G.

Ein einfacher Digraph heißt **vollständig**, wenn je zwei Knoten $u \neq v$ durch die beiden Bögen $(u, v), (v, u)$ verbunden sind. Ein **Turnier** ist ein Digraph, der für je zwei Knoten $u \neq v$ genau einen der Bögen (u, v) oder (v, u) enthält. (Der einem Turnier unterliegende Graph ist also ein vollständiger Graph; jedes Turnier ist die Orientierung eines vollständigen Graphen.)

Für $W \subseteq V$ sei $\delta^+(W) := \{(i, j) \in A |\ i \in W, j \notin W\}$, $\delta^-(W) := \delta^+(V \setminus W)$ und $\delta(W) := \delta^+(W) \cup \delta^-(W)$. Die Bogenmenge $\delta^+(W)$ (bzw. $\delta^-(W)$) heißt **Schnitt**. Ist $s \in W$ und $t \notin W$, so heißt $\delta^+(W)$ auch $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$**-Schnitt**. (Achtung: in einem Digraphen ist ein (s,t)-Schnitt kein (t,s)-Schnitt!) Statt $\delta^+(\{v\}), \delta^-(\{v\}), \delta(\{v\})$ schreiben wir $\delta^+(v), \delta^-(v), \delta(v)$, Der **Außengrad** (**Innengrad**) von v ist die Anzahl der Bögen mit Anfangsknoten (Endknoten) v. Die Summe von Außengrad und Innengrad ist der **Grad** von v. Ein Schnitt $\delta^+(W), \emptyset \neq W \neq V$, heißt **gerichteter Schnitt**, falls $\delta^-(W) = \emptyset$, d. h. falls $\delta(W) = \delta^+(W)$. Ist $r \in W$, so sagen wir auch, daß $\delta^+(W)$ ein **Schnitt mit Wurzel** r ist.

1.4 Ketten, Wege, Kreise, Bäume

Das größte Durcheinander in der graphentheoretischen Terminologie herrscht bei den Begriffen Kette, Weg, Kreis und bei den damit zusammenhängenden Namen. Wir haben uns für folgende Bezeichnungen entschieden.

In einem Graphen oder Digraphen heißt eine endliche Folge $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_k, v_k)$, $k \geq 0$, die mit einem Knoten beginnt und endet und in der Knoten und Kanten (Bögen) alternierend auftreten, so daß jede Kante (jeder Bogen) e_i mit den beiden Knoten v_{i-1} und v_i inzidiert, eine **Kette**. Der Knoten v_0 heißt **Anfangsknoten**, v_k **Endknoten** der Kette; die Knoten $v_1, \ldots, v_{k-1}$ heißen **innere Knoten**; W wird auch $[v_0, v_k]$-**Kette** genannt. Die Zahl k heißt **Länge** der Kette (= Anzahl der Kanten bzw. Bögen in W). Falls (in einem Digraphen) alle Bögen e_i der Kette W der Form (v_{i-1}, v_i) (also gleichgerichtet) sind, so nennt man W **gerichtete Kette** bzw. (v_0, v_k)**-Kette**. Ist $W = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$ eine Kette, und sind i, j Indizes mit $0 \leq i < j \leq k$, dann heißt die Kette $(v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, e_j, v_j)$ das $[v_i, v_j]$**-Segment** (bzw. (v_i, v_j)**-Segment**, wenn W gerichtet ist) von W. Jede (gerichtete) Kante, die zwei Knoten der Kette W miteinander verbindet, die aber nicht Element von W ist, heißt **Diagonale** (oder Sehne) von W.

Gibt es in einem Graphen keine parallelen Kanten, so ist eine Kette W bereits durch die Folge $(v_0, \ldots, v_k)$ ihrer Knoten eindeutig festgelegt. Desgleichen ist in einem Digraphen ohne parallele Bögen eine gerichtete Kette durch die Knotenfolge $(v_0, \ldots, v_k)$ bestimmt. Zur Bezeichnungsvereinfachung werden wir daher häufig von der Kette $(v_0, \ldots, v_k)$ in einem Graphen bzw. der gerichteten Kette $(v_0, \ldots, v_k)$ ein einem Digraphen sprechen, obgleich bei parallelen Kanten (Bögen) die benutzten Kanten (Bögen) hiermit nicht eindeutig festgelegt sind. Diese geringfügige Ungenauigkeit sollte aber keine Schwierigkeiten bereiten. Gelegentlich interessiert man sich mehr für die Kanten (Bögen) einer Kette, insbesondere wenn diese ein Weg oder ein Kreis (siehe unten) ist. In solchen Fällen ist es zweckmäßiger, eine Kette als Kantenfolge $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ zu betrachten. Ist C die Menge der Kanten (Bögen) eines Kreises oder eines Weges, so spricht man dann einfach vom Kreis oder Weg C, während $V(C)$ die Menge der Knoten des Kreises oder Weges bezeichnet. Je nach behandeltem Themenkreis wird hier die am besten geeignete Notation benutzt.

Eine Kette, in der alle Knoten voneinander verschieden sind, heißt **Weg**. Eine Kette, in der alle Kanten oder Bögen verschieden sind, heißt **Pfad**. Ein Weg ist also ein Pfad, aber nicht jeder Pfad ist ein Weg. Ein Weg oder Pfad in einem Digraphen, der eine gerichtete Kette ist, heißt **gerichteter Weg** oder **gerichteter Pfad**. Wie bei Ketten sprechen wir von $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$**-Wegen**, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$**-Wegen** etc.

Im Englischen heißt Kette walk oder chain. Im Deutschen benutzen z. B. Domschke (1982), Hässig (1979) und Berge und Ghouila-Houri (1969) ebenfalls das Wort Kette, dagegen schreiben Aigner (1984), Diestel (1986) und Wagner (1970) hierfür “Kantenzug”, während König (1936), Halin (1989) und Sachs (1970) “Kantenfolge” benutzen; Ebert (1981) schließlich nennt unsere Ketten “ungerichtete Pfade”. Dieses Wirrwarr setzt sich bezüglich der Begriffe Pfad und Weg auf ähnliche Weise fort.

Eine Kette heißt **geschlossen**, falls ihre Länge nicht Null ist und falls ihr Anfangsknoten mit ihrem Endknoten übereinstimmt. Eine geschlossene (gerichtete) Kette, in der der Anfangsknoten und alle inneren Knoten voneinander verschieden sind, heißt **Kreis** (**gerichteter Kreis**). Offensichtlich enthält jede geschlossene Kette einen Kreis.

Eine (gerichtete) Kette, die jede Kante (jeden Bogen) eines Graphen (Digraphen) genau einmal enthält, heißt (gerichteter) **Eulerpfad**. Ein geschlossener Eulerpfad heißt **Eulertour**. Ein **Eulergraph** (Eulerdigraph) ist ein Graph (Digraph), der eine (gerichtete) Eulertour enthält.

Ein (gerichteter) Kreis (Weg) der Länge $|V|$ (bzw. $|V| - 1$) heißt (gerichteter) **Hamiltonkreis** (**Hamiltonweg**). Ein Graph (Digraph), der einen (gerichteten) Hamiltonkreis enthält, heißt **hamiltonsch**. Manchmal sagen wir statt Hamiltonkreis einfach **Tour**.

Ein **Wald** ist ein Graph, der keinen Kreis enthält. Ein zusammenhängender Wald heißt **Baum**. Ein Baum in einem Graphen heißt **aufspannend**, wenn er alle Knoten des Graphen enthält. Ein **Branching** B ist ein Digraph, der ein Wald ist, so daß jeder Knoten aus B Zielknoten von höchstens einem Bogen von B ist. Ein zusammenhängendes Branching heißt **Arboreszenz**. Eine **aufspannende Arboreszenz** ist eine Arboreszenz in einem Digraphen D, die alle Knoten von D enthält. Eine Arboreszenz enthält einen besonderen Knoten, genannt **Wurzel**, von dem aus jeder andere Knoten auf genau einem gerichteten Weg erreicht werden kann. Arboreszenzen werden auch **Wurzelbäume** genannt. Ein Digraph, der keinen gerichteten Kreis enthält, heißt **azyklisch**.

Ein Graph heißt **zusammenhängend**, falls es zu jedem Paar von Knoten s, t einen $[s, t]$-Weg in G gibt. Ein Digraph D heißt **stark zusammenhängend**, falls es zu je zwei Knoten (s, t) von D sowohl einen gerichteten (s, t)-Weg als auch einen gerichteten (t, s)-Weg in D gibt. Die **Komponenten** (**starken Komponenten**) eines Graphen (Digraphen) sind die bezüglich Kanteninklusion (Bogeninklusion) maximalen zusammenhängenden Untergraphen von G (maximalen stark zusammenhängenden Unterdigraphen von D). Eine Komponente heißt **ungerade Komponente**, falls ihre Knotenzahl ungerade ist, andernfalls heißt sie **gerade Komponente**.

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $W \subseteq V$ heißt **trennend**, falls $G - W$ unzusammenhängend ist. Für Graphen $G = (V, E)$, die keinen vollständigen Graphen der Ordnung $|V|$ enthalten, setzen wir $\kappa(G) := \min\{|W| \mid W \subseteq V \text{ ist trennend}\}$. Die Zahl $\kappa(G)$ heißt **Zusammenhangszahl** (oder Knotenzusammenhangszahl) von G. Für jeden Graphen $G = (V, E)$, der einen vollständigen Graphen der Ordnung $|V|$ enthält, setzen wir $\kappa(G) := |V| - 1$. Falls $\kappa(G) \geq k$, so nennen wir G **k-fach knotenzusammenhängend** (kurz: **k-zusammenhängend**. Ein wichtiger Satz der Graphentheorie (Satz von Menger) besagt, daß G k-fach zusammenhängend genau dann ist, wenn jedes Paar $s, t, s \neq t$, von Knoten durch mindestens k knotendisjunkte $[s, t]$-Wege miteinander verbunden ist. (Eine Menge von $[s, t]$-Wegen heißt **knotendisjunkt**, falls keine zwei Wege einen gemeinsamen inneren Knoten besitzen und die Menge der in den $[s,t]$-Wegen enthaltenen Kanten keine parallelen Kanten enthält.)

Eine Kantenmenge F eines Graphen $G = (V,E)$ heißt **trennend**, falls $G - F$ unzusammenhängend ist. Für Graphen G, die mehr als einen Knoten enthalten, setzen wir $\lambda(G) := \min\{|F| \mid F \subseteq E \text{ trennend}\}$. Die Zahl $\lambda(G)$ heißt **Kantenzusammenhangszahl**. Für Graphen G mit nur einem Knoten setzen wir $\lambda(G) = 0$. Falls $\lambda(G) \geq k$, so nennen wir G **k-fach kantenzusammenhängend** (kurz: **k-kantenzusammenhängend**). Eine Version des Menger'schen Satzes besagt, daß G k-kantenzusammenhängend genau dann ist, wenn jedes Paar $s, t, s \neq t$, von Knoten durch mindestens k kantendisjunkte $[s,t]$-Wege verbunden ist. Für Graphen G mit mindestens einem Knoten sind die Eigenschaften "G ist zusammenhängend", "G ist 1-kantenzusammenhängend" äquivalent.

Analoge Konzepte kann man in Digraphen definieren. Man benutzt hierbei den Zusatz "stark", um den "gerichteten Zusammenhang" zu kennzeichnen. Wir sagen, daß ein Digraph $D = (V,A)$ **stark k-zusammenhängend** (bzw. **stark k-bogenzusammenhängend**) ist, falls jedes Knotenpaar $s, t, s \neq t$ durch mindestens k knotendisjunkte (bzw. bogendisjunkte) (s,t)-Wege verbunden ist. Wir setzen $\vec{\kappa}(D) := \max\{k \mid D \text{ stark } k\text{-zusammenhängend }\}$ und $\vec{\lambda}(D) := \max\{k \mid D \text{ stark } k\text{-bogenzusammenhängend}\}$; $\vec{\lambda}(D)$ heißt die **starke Zusammenhangszahl** von D, $\vec{\lambda}(D)$ die **starke Bogenzusammenhangszahl** von D.

Ein Kante e von G heißt **Brücke** (oder Isthmus), falls $G - e$ mehr Komponenten als G hat. Ein Knoten v von G heißt **Trennungsknoten** (oder Artikulation), falls die Kantenmenge E von G so in zwei nicht-leere Teilmengen E_1 und E_2 zerlegt werden kann, daß $V(E_1) \cap V(E_2) = \{v\}$ gilt. Ist G schlingenlos mit $|V| \geq 2$, dann ist v ein Trennungsknoten genau dann, wenn $\{v\}$ eine trennende Knotenmenge ist, d. h. wenn $G - v$ mehr Komponenten als G besitzt. Ein zusammenhängender Graph ohne Trennungsknoten wird **Block** genannt. Blöcke sind entweder isolierte Knoten, Schlingen oder Graphen mit 2 Knoten, die durch eine Kante oder mehrere parallele Kanten verbunden sind oder, falls $|V| \geq 3$, 2-zusammenhängende Graphen. Ein **Block eines Graphen** ist ein Untergraph, der ein Block und maximal bezüglich dieser Eigenschaft ist. Jeder Graph ist offenbar die Vereinigung seiner Blöcke.

1.5 Hypergraphen

Sei V eine endliche Menge und $\mathcal{E} = (E_i \mid i \in I)$ eine endliche Familie von Teilmengen von V. $\mathcal{E}$ heißt endlicher **Hypergraph** auf V, falls $E_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ und $\bigcup_{i \in I} E_i = V$ gilt. Manchmal nennt man auch das Paar $(V, \mathcal{E})$ **Hypergraph**. $|V|$ ist die **Ordnung** des Hypergraphen, die Elemente von V heißen **Knoten**, die Mengen E_i **Hyperkanten** (oder kurz Kanten).

Die Hyperkanten mit genau einem Element heißen **Schlingen**. Ein Hypergraph heißt **einfach**, wenn alle Kanten voneinander verschieden sind. In diesem Falle ist $\mathcal{E}$ eine Teilmenge von 2^V. (2^V bezeichnet die Potenzmenge von V.)

Jeder Graph ohne isolierte Knoten kann also als Hypergraph aufgefaßt werden, dessen (Hyper-) Kanten höchstens 2 Elemente enthalten. Ein einfacher Graph ohne isolierte Knoten ist ein einfacher Hypergraph mit $|E_i| = 2$ für alle $i \in I$.

Es ist gelegentlich nützlich, graphentheoretische Objekte als Hypergraphen aufzufassen. Sei z. B. $D = (V, A)$ ein Digraph, und seien $s, t \in V$ zwei festgewählte Knoten. Sei $B \subseteq A$ die Menge der Bögen, die auf mindestens einem (s, t)-Weg liegen. Seien $\mathcal{E}_1 := \{P \subseteq B \mid P$ ist die Bogenmenge eines (s, t)-Weges $\}$, $\mathcal{E}_2 := \{C \subseteq B \mid C$ ist ein (s, t)-Schnitt in $(V, B)\}$, dann sind $(B, \mathcal{E}_1)$ und $(B, \mathcal{E}_2)$ zwei interessante Hypergraphen, die uns in der Theorie der Blocker wiederbegegnen werden. In dieser Theorie sind besonders **Antiketten** (oder Clutter) von Interesse. Das sind Hypergraphen $(V, \mathcal{E})$, so daß für je zwei Kanten $E, F \in \mathcal{E}$ weder $E \subseteq F$ noch $F \subseteq E$ gilt. Der oben definierte Hypergraph $(B, \mathcal{E}_1)$ ist für jeden Digraphen D eine Antikette, dies gilt jedoch nicht für den Hypergraphen $(B, \mathcal{E}_2)$.

1.6 Matroide, Unabhängigkeitssysteme

Ist E eine endliche Menge und $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ eine Menge von Teilmengen von E, dann heißt $\mathcal{I}$ oder das Paar $(E, \mathcal{I})$ **Unabhängigkeitssystem** auf E, falls gilt:

(I.1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(I.2) $I \subseteq J \in \mathcal{I} \Longrightarrow I \in \mathcal{I}$.

Die Elemente von $\mathcal{I}$ heißen **unabhängige Mengen**, die Mengen in $2^E \setminus \mathcal{I}$ **abhängige Mengen**. $(E, \mathcal{I} \setminus \{\emptyset\})$ ist also ein einfacher Hypergraph. Beispiele graphentheoretisch interessanter Unabhängigkeitssysteme sind etwa die Menge aller Matchings $\{M \subseteq E \mid M$ Matching $\}$ oder die Menge aller stabilen Knotenmengen $\{S \subseteq V \mid S$ stabil $\}$ eines Graphen $G = (V, E)$ oder die Menge aller Branchings $\{B \subseteq A \mid (V, B)$ Branching $\}$ eines Digraphen $D = (V, A)$.

Ein Unabhängigkeitssystem $(E, \mathcal{I})$ heißt **Matroid**, falls gilt

(I.3) $I, J \in \mathcal{I}, |I| = |J| + 1 \Longrightarrow \exists e \in I \setminus J$ mit $J \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.

Ist $(E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem und $F \subseteq E$, dann heißt jede Menge $B \subseteq F$ mit $B \in \mathcal{I}$, die in keiner weiteren Menge mit diesen beiden Eigenschaften enthalten ist, **Basis** von F. Die Zahl

$$r(F) := \max\{|B| \mid B \text{ Basis von } F\}$$

ist der **Rang** von F bezüglich $(E, \mathcal{I})$. Für Matroide $(E, \mathcal{I})$ folgt aus (I.3), daß für jede Menge $F \subseteq E$ alle Basen von F die gleiche Kardinalität besitzen.

Eine abhängige Menge $C \subseteq E$, die die Eigenschaft hat, daß $C \setminus \{e\}$ unabhängig ist für alle $e \in C$, heißt **Zirkuit** (oder Kreis) des Unabhängigkeitssytems $(E, \mathcal{I})$.

Ein klassisches Beispiel für Matroide ist das folgende. Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann ist $\mathcal{I} := \{F \subseteq E \mid (V, F) \text{ Wald}\}$ das Unabhängigkeitssystem eines Matroids auf E. Dieses Matroid wird das **graphische Matroid** bezüglich G genannt. Die Zirkuits von $(E, \mathcal{I})$ sind die Kreise von G, die Basen einer Kantenmenge F sind die Vereingungen von aufspannenden Bäumen der Komponenten von $(V(F), F)$.

Ist E eine Menge und $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ ein Mengensystem, so nennen wir eine Menge $M \in \mathcal{I}$ **maximal** (bzw. **minimal**) bezüglich $\mathcal{I}$, wenn es keine Menge $M' \in \mathcal{I}$ gibt mit $M \subset M'$ (bzw. $M' \subset M$). $M \in \mathcal{I}$ heißt ein **größtes** (bzw. **kleinstes**) Element von $\mathcal{I}$, wenn $|M'| \leq |M|$ (bzw. $|M'| \geq |M|$) gilt für alle $M' \in \mathcal{I}$. So sind z. B. bezüglich eines Unabhängigkeitssystems $(E, \mathcal{I})$ und einer Menge $F \subseteq E$ die Basen von F genau die maximalen Elemente von $\mathcal{I}_F := \{I \in \mathcal{I} \mid I \subseteq F\}$. Nicht jede Basis ist auch ein größtes Element von $\mathcal{I}_F$. (Z. B. sind nicht alle maximalen Matchings (maximalen stabilen Knotenmengen) in einem Graphen größte Matchings (größte stabile Mengen).) Ist $(E, \mathcal{I})$ jedoch ein Matroid, so sind alle maximalen Elemente von $\mathcal{I}_F$ auch größte Elemente von $\mathcal{I}_F$. (In einem zusammenhängenden Graphen sind z. B. alle maximalen Wälder aufspannende Bäume.)

Gute Einführungen in die Matroidtheorie sind die Bücher Oxley (1992) und Welsh (1976).

1.7 Liste einiger in der Graphentheorie verwendeter Symbole

G	bezeichnet meistens einen Graphen
D	bezeichnet meistens einen Digraphen
n	Anzahl der Knoten eines Graphen (wenn möglich)
m	Anzahl der Kanten eines Graphen (wenn möglich)
$\alpha(G)$	Stabilitätszahl = maximale Kardinalität einer stabilen Menge in G
$\omega(G)$	Cliquenzahl = maximale Kardinalität einer Clique in G
$\tau(G)$	Knotenüberdeckungszahl = minimale Kardinalität einer Knotenüberdeckung von G
$\rho(G)$	Kantenüberdeckungszahl = minimale Kardinalität einer Kantenüberdeckung von G
$\nu(G)$	Matchingzahl = maximale Kardinalität eines Matchings in G
$\chi(G)$	Färbungszahl = chromatische Zahl = minimale Anzahl von stabilen Mengen in einer Knotenfärbung von G
$\overline{\chi}(G)$	Cliquenüberdeckungszahl = minimale Anzahl von Cliquen in einer Cliquenüberdeckung von G
$\gamma(G)$	Kantenfärbungszahl = chromatischer Index = minimale Anzahl von Matchings in einer Kantenfärbung von G
$\Delta(G)$	maximaler Grad eines Knotens von G
$\delta(G)$	minimaler Grad eines Knotens von G
$\delta(W)$	der durch die Knotenmenge W induzierte Schnitt
$\delta^+(W)$	Menge aller Bögen mit Anfangsknoten in W und Endknoten in $V \setminus W$
$\delta^-(W)$	Menge aller Bögen mit Endknoten in W und Anfangsknoten in $V \setminus W$
$\kappa(G)$	Zusammenhangszahl = maximales κ, so daß G κ-zusammenhängend ist
$\vec{\kappa}(D)$	starke Zusammenhangszahl = maximales κ, so daß G stark κ-zusammenhängend ist
$\lambda(G)$	Kantenzusammenhangszahl = maximales κ, so daß G κ-kantenzusammenhängend ist
$\vec{\lambda}(G)$	starke Bogenzusammenhangszahl = maximales κ, so daß D stark κ-bogenzusammenhängend ist
$\Gamma(W)$	Menge der Nachbarn der Knotenmenge W
$G[W]$	der von der Knotenmenge W induzierte Untergraph von G
$G - W$	der aus G durch Entfernung der Knotenmenge W entstehende Graph
$G - F$	der aus G durch Entfernung der Kantenmenge F entstehende Graph
$G \cdot W$	der aus G durch Kontraktion der Knotenmenge W entstehende Graph
$G \cdot F$	der aus G durch Kontraktion der Kantenmenge F entstehende Graph
$\deg(v)$	Grad des Knoten v
$E(W)$	Menge aller Kanten von G mit beiden Endknoten in W
$A(W)$	Menge alle Bögen von D mit Anfangs- und Endknoten in W
$V(F)$	Menge aller Knoten aus G (bzw. D) die Endknoten (bzw. Anfangs- oder Endknoten) mit mindestens einer Kante (bzw. eines Bogens) aus F sind
K_n	vollständiger Graph mit n Knoten
$K_{m,n}$	vollständig bipartiter Graph mit $\|V_1\| = m$ und $\|V_2\| = n$
$L(G)$	Kantengraph von G
$\overline{G}$	Komplement von G

1.8 Literatur

M. Aigner (1984) *Graphentheorie: Eine Entwicklung aus dem 4-Farben-Problem,* Teubner Verlag, Stuttgart, 1984

B. Bollobás (1998) *Modern Graph Theory,* Springer Verlag, New York, 1998

J. A. Bondy & U. S. R. Murty (1976) *Graph Theory with Applications,* American Elsevier, New York and Macmillan, London, 1976

Berge und Ghouila-Houri (1969) *Programme, Spiele, Transportnetze,* Teubner, Leipzig, 1969

R. Diestel (2000) *Graphentheorie,* Springer Verlag, Berlin, 2000, siehe auch URL: `www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie`

W. Domschke (1982) *Logistik: Rundreisen und Touren,* Oldenbourg, München, 1982

J. Ebert (1981) *Effiziente Graphenalgorithmen,* Wiesbaden, 1981

M. C. Golombic (1980) *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs,* Academic Press, New York, 1980

R. Halin (1989) *Graphentheorie,* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1989

K. Hässig (1979) *Graphentheoretische Methoden des Operations Research,* Teubner, Stuttgart, 1979

D. Jungnickel (1994) *Graphen, Netzwerke und Algorithmen,* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim (3. Auflage)

D. König (1936) *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936 (mehrfach auf deutsch und in englischer Übersetzung nachgedruckt)

J. G. Oxley (1992) *Matroid Theory,* Oxford University Press, Oxford, 1992

H. Sachs (1970) *Einführung in die Theorie der endlichen Graphen,* Teubner, Leipzig, 1970, und Hanser, München, 1971

K. Wagner (1970) *Graphentheorie,* BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1970

H. Walther und G. Nägler (1987) *Graphen, Algorithmen, Programme,* VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1987

D. J. A. Welsh (1980) *Matroid Theory,* Academic Press, New York, 1980

D. B. West (2000) *Introduction to Graph Theory,* Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000