Konrad-Zuse-Zentrum
für Informationstechnik Berlin

Takustraße 7
D-14195 Berlin-Dahlem
Germany

MARTIN GRÖTSCHEL UND BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL

Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht

ZIB-Report 08-21 (Dezember 2008)

Diskrete Mathematik und ihre Anwendungen: Auf dem Weg zu authentischem Mathematikunterricht

Martin Grötschel* und Brigitte Lutz-Westphal†

Zusammenfassung

Der Mathematikunterricht in Schulen lebt unter anderem davon, immer wieder neue Impulse zu bekommen und aufzunehmen. Wir haben in den vergangenen Jahren daran gearbeitet, Themen der modernen angewandten Mathematik, insbesondere aus der angewandten diskreten Mathematik, für den Unterricht an Schulen zugänglich zu machen. In diesem Artikel wollen wir einen Einblick in diese Arbeit geben. Wir legen dar, auf welchen Vorstellungen von Mathematikunterricht die erarbeiteten Konzepte basieren und aus welchen Gründen wir die Themen für geeignet halten, einen solchen Unterricht zu realisieren.

1 Moderne angewandte Mathematik für den Schulunterricht

Das heutige Leben ist durchdrungen von komplexen Technologien, die in vielen Fällen erst in den letzten 10 Jahren entstanden sind und in diesem Sinne modern sind. Ohne Kommunikationsnetze, Internet, Mobilfunk, Logistik, Verkehrstechnik, medizinische Apparate, etc. könnte die heutige Gesellschaft nicht funktionieren. Fast alle dieser Technologien haben einen hohen Mathematikanteil. Der „normale Bürger" weiß davon nichts, der Schulunterricht könnte dem ein wenig abhelfen. Einige mathematische Aspekte dieser Technologien sind einfach und sogar spielerisch intuitiv zugänglich. Solche Anwendungen, die zusätzlich noch der Lebensumwelt der Schüler zugehören, können dazu genutzt werden, die mathematische Modellierung, also die mathematische Herangehensweise an die Lösung praktischer Fragen, anschaulich zu erläutern. Gerade in der diskreten Mathematik können hier, quasi „nebenbei" mathematische Theorien erarbeitet und Teilaspekte (Definitionen, Fragestellungen, einfache Sachverhalte) durch eigenständiges Entdecken der Schüler entwickelt werden. Wir beginnen mit einigen Beispielen.

1.1 Mobilfunk und Graphenfärbung

Das Färben von Landkarten hat zu der Frage nach der minimalen Zahl von Farben geführt, mit denen man die Knoten eines Graphen so färben kann, dass zwei benachbarte Knoten verschieden gefärbt sind. Landkartenfärben ist vielleicht heute nicht mehr so spannend wie die Mobilfunkerei. Fast jede/r Schüler/in hat ein Handy, und die durchaus vorhandene technische Neugier junger Menschen kann man dazu nutzen, einige

*TU Berlin, Zuse-Institut Berlin, MATHEON, groetschel@zib.de
†Hochschule Vechta, MATHEON, brigitte.lutz-westphal@uni-vechta.de

mathematische Aspekte des Mobilfunks lebensnah zu erläutern. Ein Beispiel hierfür ist die Kanalzuweisung im GMS-Mobilfunk. Jeder deutsche Mobilfunkanbieter verfügt über rund hundert Kanäle, die er seinen rund 15.000 Antennen so zuweisen muss, dass sich die Antennen gegenseitig nicht stören. Zwei „nah beieinander“ liegende Antennen stören sich, wenn sie auf demselben Kanal senden. Die einfachste Version dieses Problems kann man als Knotenfärbungsproblem (Farbe entspricht Kanal) formulieren. Führt man Interferenzwerte und Kanalabstände ein, so kommt man sehr schnell zu anschaulich klaren und praxisnahen Fragen der Kanalzweisung, die derzeit Gegenstand der Forschung, aber Schülern durchaus zugänglich sind und für die Schüler u. a. heuristische Lösungsalgorithmen entwickeln können. Daten von konkreten Praxisproblemen stehen im Internet zur Verfügung, u.a. im FAP web (http://fap.zib.de/problems). Nebenbei bemerkt: In diesem Zusammenhang bieten sich in höheren Klassen Abstecher zur Kryptographie und zur Codierungstheorie an, Themen, die mit Zahlentheorie, Algebra und theoretischer Informatik verknüpft sind und die man ebenfalls in Unterrichtseinheiten umsetzen kann, die mathematische Theorie und Lebensumwelt verbinden.

1.2 Wege finden

Die Suche nach optimalen Wegen: Ein abwechslungsreicheres Anwendungsfeld gibt es kaum. Wie komme ich mit öffentlichen Verkehrsmitteln am besten von zu Hause zur Schule oder einen zentralen Punkt der Stadt? In allen Städten bieten heute die Nahverkehrssysteme im Internet „Routenplaner“ an, die schnellste Wege berechnen. Schüler nutzen diese (speziell in Großstädten wie Berlin) intensiv, beispielsweise bei der Planung ihrer Freizeitaktivitäten. Die Algorithmen hierzu sind einfach und eignen sich sehr gut für die selbständige Erarbeitung im Unterricht. Aber was ist überhaupt der beste Weg: der kürzeste, der schnellste, der bequemste (wenig umsteigen), der preiswerteste? Dieselbe Frage stellt sich, wenn das Auto der Familie ein Navigationssystem hat und der beste Weg zum Ziel gesucht wird. Hier kann man wunderbar über Modellierung, Zielkonflikte etc. diskutieren und z. B. die Dispositionszentrale der örtlichen Verkehrsbetriebe besuchen, um einen Eindruck von der enormen Komplexität der Aufgaben im ÖPNV zu bekommen. Die Disponenten werden dann gerne erläutern, wie schwierig es ist, einen guten Fahrplan zu erstellen, die Umläufe von Bussen zu planen und Busfahrer gut einzusetzen. Weniger komplexe Versionen dieser Aufgaben kann man wiederum im Unterricht behandeln. Wieviele Umsteigemöglichkeiten gibt es am Bahnhof Berlin-Alexanderplatz? Wie beschreibt man die Abbiegemöglichkeiten am Ernst-Reuter-Platz graphentheoretisch? Und dann kann man sich mit Flugreisen beschäftigen, der Wegeplanung für die Müllabfuhr, den Postboten oder den Zeitungsausträger, Varianten, die manchmal schwierig und manchmal einfach zu lösen sind. Zusätzlich kann man dann, wenn es der zeitliche Rahmen und die Leistungsstärke der Klasse erlauben, in die Informatik eintauchen, das Problem angemessener Datenstrukturen zur Speicherung von Graphen erarbeiten, Laufzeiten von Algorithmen oder sogar Grundzüge der Komplexitätstheorie. Dies sind reizvolle Themen, die bei Spezialveranstaltungen für besonders motivierte Schüler auf großes Interesse gestoßen sind.

1.3 Logistik

Wie kommt der Joghurtbecher in den Kühlschrank und der Bleistift in die Schultasche? Was bedeutet „just in time“ im Automobilbau? Hier geht es um Flüsse in Netzwerken und die Beschreibung zeitkritischer Prozesse. Natürlich ist die Komplexität dieser Anwendungen zu groß für die Behandlung im Schulunterricht, aber die Bewegungen eines Bediengerätes für ein Hochregallager lassen sich mühelos graphentheoretisch deuten. Eine Besichtigung eines Logistikzentrums oder eines großen Warenlagers kann den Schülern einen Eindruck von der Welt der Güterversorgung geben, und hier ist überall Mathematik am Werk, die für Schülerinnen und Schüler sichtbar gemacht werden kann. Fragen der Reihenfolgeplanung (z. B. bei der Maschinenbelegung) sind kombinatorischer und/oder graphentheoretischer Natur und sind sehr gut für einen anwendungsnahen Unterricht geeignet.

1.4 Leiterplatten und Chips

Jeder, der einmal ein Fernsehgerät, einen Laptop oder ein Mobilfunkgerät geöffnet hat, sieht dort eine Vielzahl von Leiterplatten und Chips. Unzählige mathematische Aufgaben sind beim Entwurf und der Produktion dieser Geräte zu lösen. Wie platziere ich die Komponenten auf einem Chip, wie lege ich die Verbindungen zwischen den Komponenten (Verdrahtung)? Wie bohre ich die Löcher möglichst schnell in die Leiterplatte, wie kann ich die Anzahl der benötigten Löcher minimieren, etc.? Für vereinfachte Leiterplatten und Chips kann man Verdrahtungsprobleme graphentheoretisch analysieren. Das schnelle Bohren von Löchern führt auf ein Travelling-Salesman-Problem (das klassische Problem der kombinatorischen Optimierung). Die Minimierung der Anzahl der Löcher kann man auf ein Max-Cut-Problem zurückführen und stößt dabei auf interessante Aspekte der Graphentheorie.

Es ist natürlich klar, dass die volle Komplexität der oben skizzierten Fragestellungen nicht im Schulunterricht dargestellt werden kann, aber viele der angesprochenen konkreten Probleme lassen sich so vereinfacht aufarbeiten, dass sie für Schülerinnen und Schüler mathematisch behandelbar sind[1], gleichzeitig jedoch die Lebensnähe erhalten bleibt. Viele erfolgreiche Versuche dieser Art kann man in dem seit sechs Jahren durchgeführten Wettbewerb „mathematischer Adventskalender“ (www.mathekalender.de) des DFG-Forschungszentrums MATHEON finden. Die Aufgaben dort sind keinesfalls nur aus der diskreten Mathematik, es werden auch Differentialgleichungen und Stochastik behandelt. Eine Auswahl der Aufgaben ist in [2] zu finden.

2 Authentischer Mathematikunterricht

Moderne Anwendungen von Mathematik, wie beispielsweise die im ersten Abschnitt skizzierten, sollen den Mathematikunterricht bereichern und können insbesondere in Verbindung mit einer speziellen methodischen Herangehensweise dazu beitragen, einen neuen Blick auf Mathematik zu vermitteln[2] Zunächst erläutern wir, welche übergeordneten Vorstellungen und Ziele wir mit einem solchen Mathematikunterricht verfolgen.

Es gibt zahllose Forderungen an die Intentionen und Ziele von Mathematikunterricht. Jede davon betont andere Schwerpunkte. Die Diskussion über die Ziele des Mathematikunterrichts wurde in den letzten Jahren durch die Einführung von Bildungsstandards und der damit verbundenen Kompetenzorientierung des Unterrichts neu belebt und erweitert.

Der Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung wird in den 2003 in Deutschland in Kraft getretenen „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss“ durch folgende Liste von Grunderfahrungen, die der Unterricht ermöglichen soll, charakterisiert.

[1] Für die Umsetzung und Erprobung ist im Rahmen der Unterrichtsentwicklung und -erforschung noch einige Arbeit zu leisten.

[2] vgl. hierzu die Fragebogenantworten von Schüler/innen in Kapitel 7 in [12] bzw. auszugsweise in Abschnitt 5 dieses Artikels, etwa die Aussage, der Unterricht sei „besser als Mathe”gewesen.

> „Mathematikunterricht trägt zur Bildung der Schülerinnen und Schüler bei, indem er ihnen insbesondere folgende Grunderfahrungen ermöglicht, die miteinander in engem Zusammenhang stehen:
>
> - technische, natürliche, soziale und kulturelle Erscheinungen und Vorgänge mit Hilfe der Mathematik wahrnehmen, verstehen und unter Nutzung mathematischer Gesichtspunkte beurteilen,
> - Mathematik mit ihrer Sprache, ihren Symbolen, Bildern und Formeln in der Bedeutung für die Beschreibung und Bearbeitung von Aufgaben und Problemen inner- und außerhalb der Mathematik kennen und begreifen,
> - in der Bearbeitung von Fragen und Problemen mit mathematischen Mitteln allgemeine Problemlösefähigkeit erwerben.“

Weiter wird die „aktive Auseinandersetzung“ mit der Materie gefordert, „selbstständiges Lernen“, das „individuelle Lernwege und Lernergebnisse“ berücksichtigt, Orientierung an den Lernprozessen und Lernergebnissen der Schülerinnen und Schüler und nicht allein an der Fachsystematik. „Schülerinnen und Schüler sollen auf diese Weise Mathematik als anregendes, nutzbringendes und kreatives Betätigungsfeld erleben [...]“ (alles [14], S. 9).

Die veränderte, kompetenzorientierte Perspektive auf die Unterrichtsziele hat nicht nur Auswirkungen auf die Unterrichsmethodik. Die Bildungsstandars gewähren dadurch, dass sie lediglich „zentrale Ziele und Konzepte eines Faches“[3] benennen, eine gewisse inhaltliche Freiheit. Diese Freiheit äußert sich beispielsweise darin, dass einige Bundesländer in Kerncurricula verbindliche Inhalte festschreiben, die aber nicht die gesamte Unterrichtszeit füllen, so dass hier individuelle Möglichkeiten für die inhaltliche Ausgestaltung des Unterrichts entstehen.

Die verstärkte Konzentration auf die Förderung von bestimmten Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler hat die inhaltliche Diskussion allerdings etwas in den Hintergrund treten lassen. Die in den vergangenen Jahren entwickelten standardorientierten Lehrpläne der einzelnen Bundesländer beschäftigen sich zum Großteil auf der Basis des traditionellen Inhaltskanons mit der Umsetzung der Kompetenzförderung. Moderne Inhalte oder neue Aspekte traditioneller Inhalte kommen eher zu kurz.

Vor diesem Hintergrund soll hier ein Beitrag zur Diskussion über inhaltliche Unterrichtsziele geleistet werden. Insbesondere wird dabei eine Betonung auf den Bezug zur mathematischen Forschung gelegt. Die zentrale Forderung an Mathematikunterricht ist dabei, dass er authentisch in verschiedener Hinsicht sein soll.

Authentischer Mathematikunterricht umfasst:

1. eine authentische (= persönlich ansprechende und herausfordernde, echte mathematische Erfahrungen ermöglichende) Begegnung und Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit dem Stoff,
2. Authentizität (= fachliche Angemessenheit) der im Laufe der unterrichtlichen Erarbeitung verwendeten mathematischen Methoden und
3. authentische (= ein zeitgemäßes Bild von Mathematik vermittelnde) Inhalte in realen oder realistischen Kontexten.

Diese drei Punkte haben insbesondere Einfluss auf zwei Dimensionen von Unterricht: die Tätigkeiten der Schülerinnen und Schüler und die fachlichen Inhalte.

Ziele eines authentischen Unterrichts sind:

- einen Bezug zwischen der persönlichen Erlebniswelt und mathematischem Denken und Handeln herzustellen,

[3] [13] S. 18

- mathematische Denk- und Arbeitsweisen durch eigenes Tun zu entdecken und kennenzulernen,
- das individuelle mathematische Handlungsrepertoire zu erweitern,
- Mathematik als lebendige Wissenschaft in ihren Anwendungen zu erleben.
- einen Einblick in die mathematische Forschung zu bekommen.

Diese Thesen entwickeln die von Alexander Israel Wittenberg (in [20], 1963) und Hans-Joachim Vollrath (in [18], 2001) ausgearbeiteten Theorien weiter[4]. Vollrath definiert ([18], S. 26): „Ein Unterricht, der zuverlässige Erfahrungen mit Mathematik vermittelt, soll *authentisch* genannt werden.“ Solch ein Unterricht habe drei grundlegende Fragen zu beantworten ([18], S. 26): Was ist Mathematik? Wie entsteht Mathematik? Was kann man mit Mathematik anfangen?

Einen ähnlichen Ansatz gibt es in den Niederlanden. Dort wird aufbauend auf den Theorien Hans Freudenthals, der Mathematik als eine menschliche Tätigkeit hervorhob (im Gegensatz zur Mathematik als fertiges, zu lernendes Produkt), die „Realistic Mathematics Education“ (RME) seit den 70er Jahren fortentwickelt[5]. Dabei steht „realistic“ nicht unbedingt für realitätsgetreue Anwendungen, sondern bezieht sich, ebenso wie in der Theorie des authentischen Mathematikunterrichts, vor allem auf die Art der Auseinandersetzung der Schülerinnen und Schüler mit den Inhalten.

Bereits in den frühen 60er Jahren machte Alexander Israel Wittenberg sich für einen (damals noch nicht so benannten) authentischen Mathematikunterricht stark ([20], S. 50/51):

> „Im Unterricht muss sich für den Schüler eine *gültige Begegnung* mit der Mathematik, mit deren Tragweite, mit deren Beziehungsreichtum vollziehen; es muß ihm am Elementaren ein echtes Erlebnis dieser Wissenschaft erschlossen werden. Der Unterricht muß dem gerecht werden, *was Mathematik wirklich ist.* Diese Zielrichtung muß die Auseinandersetzung mit der konkreten Gestaltung des Unterrichts leiten.“

Seine Forderungen beziehen sich also nicht nur auf eine bestimmte Methodik oder bestimmte Inhalte, sondern auf beides zugleich, was diesen Ansatz gegenüber vielen anderen auszeichnet, die entweder vorwiegend die Methodik oder vorwiegend die Inhalte bzw. die Sequenzierung der Inhalte im Blick haben.

Auch Freudenthal plädiert für eine ähnliche Ausrichtung des Unterrichts, wenn er schreibt ([5], S. 126): „[...] wie die Struktur im Großen der zu unterrichtenden Mathematik zu verstehen wäre: sie ist nicht starres Gerüst, sondern sie entsteht und vergeht mit der sich im Lehrprozess entwickelnden Mathematik. [...] Das im Großen Strukturierende soll [...] erlebte Wirklichkeit sein; nur so konnten wir beziehungsvolle Mathematik unterrichten; nur so konnten wir sicher sein, daß der Schüler sich die Mathematik, die er lernt, einverleibt; nur so konnte die Anwendbarkeit der gelernten Mathematik gewährleistet werden.“

Authentischer Mathematikunterricht bedeutet, authentische Erfahrungen mit mathematischen Fragen, Inhalten und Methoden zu ermöglichen, und zwar anhand von „authentischer Mathematik“. Damit ist gemeint, für den Unterricht Inhalte auszuwählen, die widerspiegeln, was heute (aber nicht nur heute) die Wissenschaft Mathematik ausmacht. Aktuelle Forschungsrichtungen und Anwendungen sind ebenso einzubeziehen wie bewährte Anwendungsthemen und klassische Inhalte, die dem mathematischen Basiswissen zuzuordnen sind. Keinesfalls kann „authentisch“ bedeuten, stets nur mit realen Daten zu arbeiten. Die Datenmengen sind meist viel zu groß für eine unterrichtliche Behandlung, abgesehen davon, dass man sie in vielen Fällen gar nicht von

[4] Bei einigen anderen Autoren findet man den Begriff „authentisch“ ebenfalls: z. B. in: Büchter/Leuders [3], Habdank-Eichelsbacher/H. N. Jahnke [8], Hußmann/Leuders [9], Th. Jahnke [11].

[5] vgl. Van den Heuvel-Panhuizen [16], [17] und Westermann [19]

den Unternehmen erhalten kann. Dies trifft auch auf einige der eingangs genannten Anwendungsbeispiele zu. Sie müssen vereinfacht werden, behalten aber ihre Authentizität, indem sie problemorientiert aufbereitet werden und somit zwar häufig nicht mit realen Daten, aber dennoch in einem realistischen Kontext von den Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden.

3 Unterricht über Wegeoptimierung

Die von uns gewählten „klassischen“ Themen der kombinatorischen Optimierung, wie das Kürzeste-Wege-Problem, das Travelling-Salesman-Problem oder das Chinesische Postboten-Problem lassen sich in einem problemorientierten erforschenden Unterricht erarbeiten, wie zahlreiche Unterrichtsversuche in verschiedenen Schulen und Klassenstufen gezeigt haben.[6] Die initiale Fragestellung ist kurz und sofort verständlich, das Arbeitsmaterial leicht zu beschaffen. Spezielle mathematische Vorkenntnisse sind für die Erarbeitung nicht notwendig, da das benötigte Fachwissen im Rahmen des Problemlöseprozesses aufgebaut werden kann und soll.

Weil eine einzige Frage, z. B. "Wie komme ich optimal zum Ziel?", ausreicht, um das Thema sehr umfassend zu erschliessen, kann hier auch gut mit Lerntagebüchern gearbeitet werden.[7] Als Unterrichtsmaterial dienen U-Bahnstreckennetze oder Stadtplanausschnitte oder nach einem Erkundungsausflug erstellte schematische Pläne von Bahnhöfen o. ä.

Der Unterricht kann so gestaltet werden, dass zunächst der Prozess der mathematischen Modellierung im Vordergrund steht, was hier bedeutet, passende Graphen zu finden und sich für eine bestimmte Modellierungstiefe zu entscheiden (siehe Abb. 1). Auch wenn diese Modellierung auf den ersten Blick vielleicht trivial erscheinen mag, so kann sie, gerade wenn ein Straßennetz mittels eines Graphen modelliert werden soll, viele wichtige Aspekte des Modellierungsprozesses bewusst machen. Insbesondere der Aspekt, dass Modellieren bedeutet, zahlreiche (nicht eindeutig vorgegebene) Entscheidungen zu treffen, kommt hier stark zum Tragen: Werden alle Fahrspuren einer Straße , alle Fahrtrichtungen oder Abbiegemöglichkeiten einzeln berücksichtigt? In dieser Phase des Unterrichts wird zunächst noch gar nicht mit Fachbegriffen der Graphentheorie gearbeitet, wohl aber bereits mit den entsprechenden Objekten.

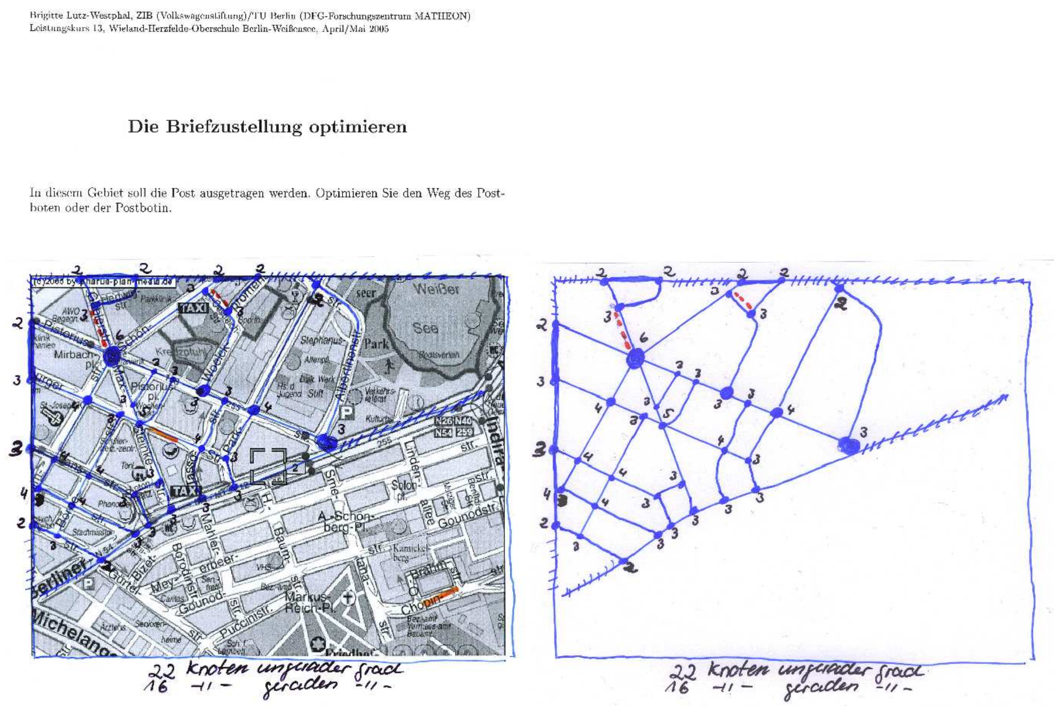
Ausgehend von dem zunächst intuitiven und visuell orientierten Umgang mit diesen, von der Realität stark abstrahierten mathematischen Objekten können in einer zweiten Unterrichtsphase präzise Definitionen und Grapheneigenschaften experimentell und selbstständig erarbeitet werden (siehe Abb. 2). Durch die konsequente Problemorientierung des Unterrichts werden keine Definitionen und Begriffe „auf Vorrat“ erarbeitet. Sie werden dann thematisiert, wenn sie im Rahmen des Problemlöseprozesses benötigt oder bereits intuitiv verwendet werden. Somit ergibt der konkrete Unterrichtsverlauf erst, welche dies sind. In einer dritten Phase (die nicht unbedingt zeitlich nach der zweiten Phase kommen muss) können die Grundideen für die entsprechenden Graphenalgorithmen erarbeiten werden (ein Beispiel findet sich in Abb. 3). Diese Algorithmen können von den Schülern selbst gefunden und erprobt werden.[8]

Alle Phasen des Unterrichts werden durch selbstständige Erarbeitung und längere

[6] Wildermuth-Gymnasium Tübingen, Kl. 8 (2002), Geschwister-Scholl-Schule Tübingen, Kl. 9 (2002), Herder-Oberschule Berlin, Profilkurs 11 (2003, 2004), Romain-Rolland-Gymnasium Berlin, Profilkurs 11 (2003), Sommerschule Blossin, Kl.12/13 (2004), Wieland-Herzfelde-Gymnasium Berlin, LK13 (2005), Wartburg-Grundschule Berlin, Kl. 5 und 6 (2007, 2008). Unterrichtsdauer: jeweils zwischen 8 und 16 Schulstunden bzw. 5 Tage Projektwoche (Blossin bzw. Wartburg-Grundschule). Auswertung durch Klassenarbeiten und Fragebögen.

[7] zur Theorie der Lerntagebücher vgl. [6]

[8] Konkrete Unterrichtsideen dafür finden sich in [12]


Brigitte Lutz-Westphal, ZIB (Volkswagenstiftung)/TU Berlin (DFG-Forschungszentrum MATHEON)
Leistungskurs 13, Wieland-Herzfelde-Oberschule Berlin-Weißensee, April/Mai 2005

Die Briefzustellung optimieren

In diesem Gebiet soll die Post ausgetragen werden. Optimieren Sie den Weg des Postboten oder der Postbotin.

Abbildung 1: Optimierung des Weges eines Müllautos: Modellieren auf Folie hilft beim Übergang vom Stadtplan (Realmodell) zum mathematischen Modell (Schülerin LK 13, Wieland-Herzfelde-Gymnasium Berlin-Weißensee).

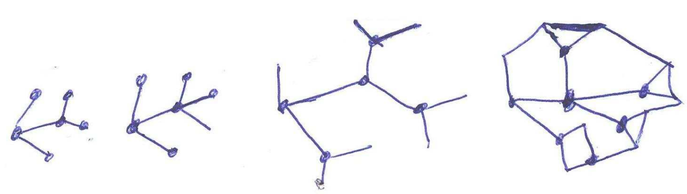
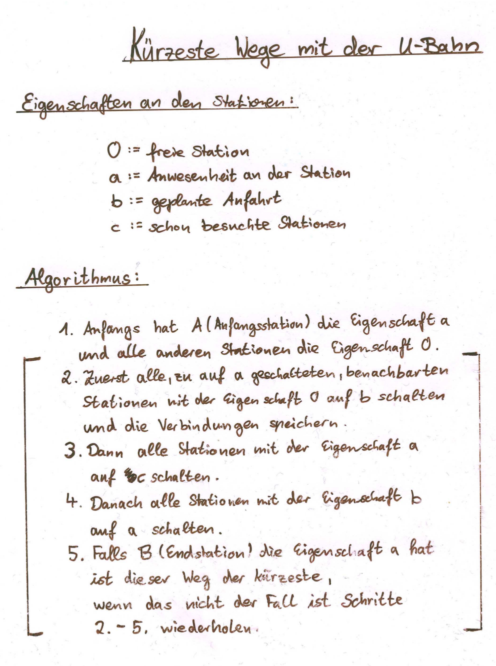


Abbildung 2: Skizzenblatt eines Schülers der 11. Klasse (Herder-Oberschule Berlin-Charlottenburg): Auf der Suche nach einem Graphen mit genau fünf Knoten mit ungeradem Grad.



Kürzeste Wege mit der U-Bahn

Eigenschaften an den Stationen:

0 := freie Station
a := Anwesenheit an der Station
b := geplante Anfahrt
c := schon besuchte Stationen

Algorithmus:

1. Anfangs hat A (Anfangsstation) die Eigenschaft a und alle anderen Stationen die Eigenschaft 0.
2. Zuerst alle, zu auf a geschalteten, benachbarten Stationen mit der Eigenschaft 0 auf b schalten und die Verbindungen speichern.
3. Dann alle Stationen mit der Eigenschaft a auf c schalten.
4. Danach alle Stationen mit der Eigenschaft b auf a schalten.
5. Falls B (Endstation) die Eigenschaft a hat ist dieser Weg der kürzeste, wenn das nicht der Fall ist Schritte 2. - 5. wiederholen.

Abbildung 3: Eine ausgeklügelte Formulierung der Breitensuche eines Schülers der Klasse 11 (Herder-Oberschule Berlin-Charlottenburg).

Zeitabschnitte des freien Experimentierens und des Austausches mit den Mitschülern geprägt. Im Wechsel damit gibt es nach Bedarf Plenumsphasen, in denen Erarbeitetes zusammengetragen und gegenseitig abgeglichen wird oder in denen kurze Lehrervorträge zu dem jeweiligen Zeitpunkt benötigte Fakten (z. B. Begriffsnamen oder neue Impulse für die Weiterarbeit) präsentieren. Die Rolle der Lehrerin oder des Lehrers ist dabei meist die eines Moderators des Lern- und Erarbeitungsprozesses, der individuelle Hilfen und Denkanstöße geben kann, aber nicht vorschreibt, wie der Weg zur Lösung auszusehen hat.

Es ist uns bewusst, dass viele der derzeit unterrichtenden Lehrerinnen und Lehrer in ihrem Studium weder Graphentheorie noch Optimierung kennengelernt haben und dass an vielen Universitäten auch heute noch Anwendungsorientierung (oft aus Zeitgründen) eher vernachlässigt wird. Aber die Zeiten ändern sich. Uns sind viele Lehrerinnen und Lehrer sowie Lehramtsstudierende begegnet, die Themen und Herangehensweisen der skizzierten Art mit Begeisterung aufgenommen und umgesetzt haben.[9] Durch Fortbildungsmaßnahmen scheint es uns nach den bisherigen Erfahrungen und Rückmeldungen der Teilnehmerinnen und Teilnehmer durchaus möglich, die für diese Art von Unterricht erforderlichen Kompetenzen zu vermitteln.

4 Didaktische Stoffanalyse

Eine ausführliche didaktische Analyse der Inhalte und die Rückmeldungen aus dem Unterricht haben bestätigt, dass das Themengebiet der kombinatorischen Optimierung

[9] Z. B. bei Fortbildungen im Rahmen des Telekom-Stiftungs-Projekts Mathematik Anders Machen (L-W gemeinsam mit Thilo Steinkrauß).

sich zur Verwirklichung eines authentischen Mathematikunterrichts gut eignet.

- Es finden sich darin leicht zugängliche Problemstellungen aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler, die eine authentische Begegnung mit Mathematik direkt ermöglichen.
- Die spezifischen mathematischen Methoden knüpfen an ein im Alltag erworbenes Handlungsrepertoire an und bleiben durch ihre oftmals algorithmische Struktur auch bei wachsender Komplexität für Schülerinnen und Schüler erfassbar.
- Die algorithmischen Methoden sind handlungsorientiert und können von den Schülerinnen und Schülern eigenständig handelnd entdeckt werden.
- Es lassen sich in sich abgeschlossene Themenkomplexe finden, die nicht hierarchisch aufgebaut sind, so dass ein freies Entdecken durch die Schülerinnen und Schüler ohne vorgegebene Reihenfolge möglich ist. Die Leitlinie des Optimierens bildet aber dennoch einen roten Faden für die Erarbeitung.
- Die grundlegenden Begriffe können von den Schülerinnen und Schülern während ihrer Auseinandersetzung mit der Problemstellung erschlossen werden.
- Die Objekte, mit denen vorwiegend hantiert wird, Graphen, sind in ihrer Darstellung sowohl handlich (durch ihre einfache Definition) als auch äußerst flexibel. Dadurch kann ohne Einschränkungen experimentiert werden. Vermutungen und Beweisideen können so selbständig erarbeitet werden.
- Die Themen haben sowohl einen starken Anwendungsbezug als auch eine direkte Anknüpfung an aktuelle Forschungsthemen. Sie haben Verbindungen zur theoretischen Informatik und verkörpern gleichzeitig ein mathematisches Fachgebiet von wachsender Bedeutung.

Einige ausgewählte Stichpunkte aus der obigen Liste werden im Folgenden näher erläutert.[10]

4.1 Leichte Zugänglichkeit

Die kombinatorische Optimierung zeichnet sich durch eine besonders leichte Zugänglichkeit aus, wie Erfahrungen im Unterricht belegen. Woran kann man diese leichte Zugänglichkeit konkret festmachen, um den Blick auch für andere Themen mit dieser Eigenschaft zu schärfen?

„Betrachtet man das Entstehen von Mathematik, dann sind im Denken des Menschen zunächst gewisse Grundvorstellungen vorhanden, die auf grundlegende mathematische Begriffe führen.“ (Vollrath [18], S. 28) Aus dieser Aussage kann geschlossen werden, dass ein mathematisches Gebiet umso leichter zugänglich ist, je näher seine Grundbegriffe alltäglichen Grundvorstellungen sind.

Viele neue Begriffe, die bei der Arbeit mit Graphen vorkommen, können direkt aus der Anschauung heraus gebildet werden. „Knoten“ und „Kante“ werden zunächst mit den Objekten assoziiert, die man zeichnet. Später erst werden diese Begriffe abstrakter gefasst, wenn es um Datenstrukturen für Graphen geht. „Nachbar“ ist ein ganz natürlicher Begriff für miteinander verbundene Knoten. Hier kommt die alltägliche Grundvorstellung dem mathematischen Begriff sehr nahe. Ebenso greifen „Kantengewicht“ oder „Kantenlänge“ Alltagsvorstellungen auf. Andere Begriffe entstehen aus dem Handeln heraus. Der graphentheoretische Begriff „Kreis“ beispielsweise wird problemlos akzeptiert, wenn er aus der Tätigkeit des Wegefindens und Kantenanmalens heraus gefunden wird. „Kreis“ bedeutet dann: eine Figur, die entsteht, wenn man Kanten nacheinander abläuft oder mit dem Stift abfährt, so dass man am Ende wieder dort ankommt, wo man angefangen hat. Es bleibt dabei noch herauszuarbeiten, dass

[10] Eine ausführliche Ausarbeitung dieser Analyse findet sich in [12]

es sinnvoll ist, keine Kreise zuzulassen, die sich selbst überkreuzen, denn diese lassen sich problemlos in überkreuzungsfreie Kreise zerlegen.

Der Begriff „Weg“ z. B. knüpft schon vom Begriffsnamen her an Alltagsvorstellungen an. Der graphentheoretische Gehalt des Begriffs entspricht auch weitgehend alltäglichen Vorstellungen. Hier kann man insbesondere den Blick für Präzision bei Definitionen schärfen. Darf ein Weg beim Startpunkt enden? Darf ein Weg einen Knoten zweimal berühren (und damit einen Kreis enthalten)? Darf eine Kante gar zweimal oder häufiger durchlaufen werden? Wann ist so etwas aus Anwendungssicht sinnvoll? Soll man eine „saloppe“ Definition eines Weges wählen, die alle diese Fälle enthält oder weitere Begriffe wie einfacher Weg, Pfad, Tour, Kette, Kantenzug etc. einführen, um die unterschiedlichen Formen von „Wegen“ präziser zu fassen? Überlegungen dieser Art helfen ungemein, einen besonderen Wert der Mathematik herauszuarbeiten: Genauigkeit.

Gerade deshalb, weil viele graphentheoretische Begriffsbildungen sehr nahe an den vorhandenen Grundvorstellungen liegen, ist ein mathematisches Präzisieren der Begriffe so gut möglich und auch notwendig. Die Alltagsvorstellung hilft dabei, zunächst überhaupt eine Vorstellung zu entwickeln. Im Sinne eines authentischen Mathematikunterrichts kann an diese Vorstellung angeknüpft werden. Und es kann während der Problembearbeitung immer wieder überprüft werden, ob der Begriff in seiner Bedeutung weiter präzisiert werden muss, ob Einschränkungen oder Erweiterungen nötig sind oder unbemerkt vorausgesetzt werden.

Neben dem „natürlichen“ intuitiven Zugang zu den Grundbegriffen begründet sich die leichte Zugänglichkeit der kombinatorischen Optimierung noch in einigen weiteren Faktoren, beispielsweise: die Nähe der Anwendungen zum Alltag, die Modularität des Stoffes, der hohe Aufforderungscharakter, die Eignung von Graphen zum Experimentieren sowie das algorithmische Arbeiten mit alltagsnahen Grundtätigkeiten.[11]

4.2 Anwendungsbezug/Alltagsbezug

Die kombinatorische Optimierung ist aus Anwendungsfragen heraus entstanden und besitzt eine Fülle konkreter Anwendungen. Bereits das Königsberger Brückenproblem von Leonhard Euler zeigt, wie aus einer angewandten Fragestellung heraus mathematische Theorie entwickelt wurde. Viele Anwendungen für die klassischen Themen der kombinatorischen Optimierung wie Routenplanung, Optimierung von Touren der Müllabfuhr oder von Rundreisen sind unmittelbar verständlich, weil sie innerhalb des Erfahrungshorizontes von Schülern liegen. Eine Identifikation mit den Problemstellungen ist möglich, da sie Alltagsfragen aufgreifen, die jeden betreffen. Vermutlich hat jeder schon einmal versucht, einen optimalen Weg zu finden, etwa auf dem Weg zur Schule oder in den Urlaub, um nur zwei Beispiele zu nennen.

Und trotz all dieser Anwendungsfreudigkeit kommt auch die Mathematik selbst nicht zu kurz, wie Anderson im Vorwort seines Buches „A first course in Combinatorial Mathematics“ beschreibt ([1], S. vii): „The subject [...] still remains an easily accessible area of mathematics, one which is becoming more and more widely used in other disciplines. The days are past when the calculus was thought to be the queen of applicable mathematics. But despite its applications, the subject of this book is genuine mathematics in all its purity [...].“

Außermathematische Anwendungen und Innermathematisches, Modellieren und Mathematiktreiben liegen hier nah beieinander. Das macht die Themen so gut zugänglich und so besonders gut geeignet für eine authentische Auseinandersetzung mit Mathematik.

[11] vgl. [12]

4.3 Optimieren

Allen von uns gewählten Themen liegen Optimierungsfragen zugrunde. Optimierungsprobleme zeichnen sich dadurch aus, dass sie ein klares Ziel vorgeben. Es bedarf keiner Erläuterungen. Herauszufinden, was genau mit „bestmöglich“ gemeint ist, ist allerdings Teil des Erarbeitungsprozesses. So schnell wie möglich, so billig wie möglich, so kurz wie möglich: Das sind Zielvorgaben, die im Alltag ständig präsent sind, und die keiner Rechtfertigung bedürfen. Floer ([4], S. 2) beschreibt Optimierungsprozesse als eine Form intellektueller Auseinandersetzung mit der Umwelt.

Viele der klassischen Mathematikaufgaben (nicht nur im Schulunterricht) haben nur eine einzige Lösung. Das ist kein Wunder, denn eine der typischen Fragen der Analysis lautet: Hat das vorliegende Problem eine Lösung und wenn ja, ist sie eindeutig? In der kombinatorischen Optimierung (und in der Optimierung im Allgemeinen) gibt es jedoch in der Regel viele zulässige Lösungen. Das Ziel ist, unter diesen eine beste herauszufinden. Hat man irgendwie eine zulässige Lösung gefunden, so ist die Frage, ob diese bereits eine beste ist oder ob man sie noch verbessern kann. Fast automatisch führt dies auf folgende Überlegungen. Wie beweist man Optimalität? Und gibt es systematische Methoden zur Verbesserung vorhandener Lösungen? Und schon eröffnen sich neue Unterrichtsthemen: Optimalitätskriterien und die Entwicklung von einfachen Heuristiken, Verbesserungs- und Approximationsmethoden. Das sind lohnende Vertiefungsgebiete, auf die wir hier aber nicht weiter eingehen können.

Beim Erfinden von Algorithmen zur Konstruktion kürzester Wege kommen naheliegende Verbesserungsprozesse vor, etwa, wenn die Breitensuche, die in ungewichteten Graphen beweisbar kürzeste Wege konstruiert, auf gewichtete Graphen angewandt wird. Dieses Verfahren liefert eine zulässige Lösung, nämlich Wege vom Startknoten zu allen anderen Knoten, man stellt aber schnell fest, dass die so konstruierten Wege nicht notwendig optimal sind. Nun kann das Verfahren verändert und anhand der Ergebnisse getestet werden, ob es kürzeste Wege erbringt. So geschieht eine Annäherung an ein Lösungsverfahren, das ein Optimum erzeugt, Schritt für Schritt über verschiedene zulässige Lösungen. Selbstverständlich muss die Korrektheit eines so gefundenen Verfahrens bewiesen werden und reicht die Überprüfung durch „Hingucken“ nicht aus, aber sie hilft, Verbesserungen vorzunehmen und selbständig zu forschen.

Beim Travelling-Salesman-Problem ergibt sich eine andere Situation. Schüler erfinden, wenn man sie einmal zum Experimentieren ermutigt hat, eine Vielzahl von heuristischen Methoden zur Bestimmung „kurzer“ Rundreisen (wie z. B. Nächster-Nachbar-Heuristik, Erweiterungsheuristiken wie Cheapest- oder Nearest-Insert). Bei der konkreten Ausführung am Beispiel fällt ihnen dann auf, dass die konstruierten Rundreisen, die ja weit vom Optimum entfernt sein können, häufig durch einfache Austauschschritte verbessert werden können. Auf diese Weise entwickeln sie Verbesserungsverfahren in der Art wie 2-opt, 3-opt, Knotentausch etc. Überrascht sind sie dann zu erfahren, dass es keine schultauglichen Beweise für die Optimalität einer Rundreise gibt. Hier kann man dann in höheren Klassen z. B. auf die Komplexitätstheorie verweisen (NP-Vollständigkeit etc.)[12]

Ein weiterer Themenkomplex kann in die unterrichtliche Erarbeitung einfließen: der Beweis von Gütegarantien. Hier zeigt sich einmal mehr die Stärke mathematischer Methoden: Das Optimum ist nicht bekannt, aber dennoch kann durch Berechnung oberer oder unterer Schranken für den Optimalwert gezeigt werden, wie weit die gefundene Lösung höchstens davon entfernt ist. Es ist durchaus möglich, im Schulunterricht die Spanning-Tree-Heuristik für das Travelling-Salesman-Problem zu erarbeiten und zu beweisen, dass eine mit dieser Heuristik konstruierte Rundreise höchstens doppelt so lang ist wie eine optimale Tour. Allerdings gilt dies nur dann, wenn die „Entfernungen“ die Dreiecksungleichung erfüllen, was wiederum eine schöne Anwendung dieser

[12] Eine elementare Einführung in die genannten Themen findet sich in [10] in den Kapiteln 4 und 9.

Ungleichung außerhalb des üblichen Geometriekontextes ist.

4.4 Modularität des Stoffes

Eine Voraussetzung für einen selbstgesteuerten Lernprozess ist, dass der Stoff verschiedene individuelle Lernwege zulässt. Solch eine Offenheit kann auf verschiedene Weisen realisiert werden. Offene Aufgaben lassen verschiedene Lösungen zu. Modellierungsaufgaben können durch unterschiedliche Modellierungsannahmen auf unterschiedliche Lösungsansätze und Ergebnisse führen. Im Falle der kombinatorischen Optimierung ist besonders die Modularität des Stoffes hervorzuheben. Der Stoff ist nicht hierarchisch gegliedert, sondern bietet die Möglichkeit in verschiedene Richtungen ausgekundschaftet zu werden.

Ausgehend von einer zentralen Problemstellung[13] können die Lernenden in einem Unterricht, der offen gestaltet ist, ihren individuellen Fragen nachgehen. Man kann beispielsweise Algorithmen entwickeln, ohne vorher Graphentheorie betrieben zu haben. Die graphentheoretischen Fragestellungen, die bei der Entwicklung eines Algorithmus eine Rolle spielen, tauchen dann auf, wenn sie benötigt werden, und werden danach bearbeitet. Umgekehrt kann es sein, dass einige Schüler sich zuerst für die Struktur des Problems interessieren und so auf graphentheoretische Sachverhalte stoßen. Andere wiederum vertiefen sich lieber zunächst in Detailfragen der Modellierung.

Diese Offenheit im Erkundungsprozess ermöglicht es, über mehrere Schulstunden hinweg freies Forschen zuzulassen, um dann die Erkundungswege zusammenzutragen, zu vergleichen und jeweils noch nicht Bearbeitetes von anderen zu lernen. Auch in einem Unterricht, in dem die Klasse gemeinsam an einzelnen Problemen arbeitet, kann diese Modularität des Stoffes genutzt werden: Die Lehrperson legt die Reihenfolge der Erarbeitungsschritte nicht im Vorhinein fest, sondern kann auf das Unterrichtsgeschehen reagieren und die Schülerinnen und Schüler den jeweils aktuell diskutierten Fragestellungen nachgehen lassen. Eine Voraussetzung dafür ist eine Offenheit der Lehrperson gegenüber dem Unterrichtsverlauf und gegenüber unerwarteten Fragen und Wendungen im Unterricht. Praktisch sieht es so aus, dass sämtliche Unterrichtsmaterialien für die Lehrperson greifbar sein müssen, um sie bei Bedarf verwenden zu können.

4.5 Alltagsnahe Grundtätigkeiten

Der Umgang mit den Dingen des täglichen Lebens ist meist diskret, nur weniges in der alltäglichen Erfahrung ist wirklich kontinuierlich außer Raum und Zeit. Zählen, Zuordnen, Sortieren, in Beziehung setzen und Entscheiden gehören zu unserem gewohnten Tätigkeitsrepertoire. Das Zählen des Geldes in der Spardose, Aufräumen, Bücher im Bücherregal ordnen und die Überlegung, wer innerhalb der Klasse gerade mit wem befreundet ist, entscheiden, welcher Pullover am besten zur Hose passt, sind Beispiele für diese diskreten Grundtätigkeiten in der Lebenswelt von Schülerinnen und Schülern.

Gehen Schülerinnen und Schüler eines der ausgewählten Probleme selbständig an, so können sie zunächst auf diese gewohnten Tätigkeiten zurückgreifen, ohne dass von vornherein Vorgaben von Lehrerseite aus gemacht werden müssen. Das erste Herangehen an die Problemlösung kann also voraussetzungsfrei (bezüglich unterrichtlicher Inhalte) geschehen. Im Lauf der Problembearbeitung kommen Fragen auf, die die Grenzen der vertrauten Methoden aufzeigen und die nach mathematischen Methoden verlangen.

Im Rahmen der Bearbeitung des chinesischen Postbotenproblems etwa, stoßen Schülerinnen und Schüler nach einer gewissen Zeit auf die Problematik der Knotengrade. Sie bemerken, dass ungerade Knotengrade Schwierigkeiten machen und sie begeben

[13] vgl. z. B. die jeweiligen Anfänge der Buchkapitel in [10]

sich auf die Suche nach einer allgemeinen Charakterisierung von (von ihnen zu diesem Zeitpunkt nicht so benannten) Eulergraphen. An dieser Stelle geschieht der Übergang vom Experimentieren mit Hilfe bereits bekannter Methoden zum mathematischen Erarbeiten von Resultaten.

An dieser Stelle gibt es eine großartige Gelegenheit, die kreativen Aspekte der Mathematik zu betonen. Mathematik wird gelegntlich als eine Wissenschaft gesehen, die sich mit der (durchaus schwierigen, aber eher roboterhaften) Umformung und Manipulation von Formeln beschäftigt. Ohne Frage sind Fähigkeiten zur geschickten Termumformung zur Erzielung neuer Einsichten große Stärken der Mathematik und müssen im Schulunterricht gelehrt werden. Das entdeckende Experimentieren mit Graphen und die präzise Formulierung darauf basierender Vermutungen ist eine andere Art mathematisch-kreativer Betätigung, und hierbei kann man Schülerinnen und Schülern das Erlebnis vermitteln, dass das experimentelle Entdecken von Eigenschaften, Zusammenhängen, Konzepten und Strukturen eine der Haupttätigkeiten des kreativen Mathematikforschens ist.

Das Besondere der Mathematik ist aber, dass Erkenntnisse durch Beweise verifiziert werden müssen. Die Kreativität, die im Beweisfindungsprozess steckt, ist schwer vermittelbar. Viele der Beweise in der Graphentheorie sind algorithmischer Natur, und nach unseren bisherigen Erfahrungen können Schülerinnen und Schüler durch algorithmische Beweise dieser Art alternative Erfahrungen und Einsichten gewinnen und andere Formen von Präzision erlernen. Ein wunderbares Experiment ist z. B. der Versuch, einen Algorithmus für das Auffinden einer Euler-Tour in einem Eulergraphen zu formulieren und dessen Korrektheit zu beweisen. Selbst Euler ist das in seiner berühmten Arbeit über die Königsberger Brücken nicht gelungen (Erst 137 nach Euler ist von Hierholzer der erste korrekte Beweis veröffentlicht worden).

„Es gibt keine Formel“ war an dieser Stelle dann auch ein Schülerinnenkommentar (LK 13), in dem durchaus auch Enttäuschung mitschwang, denn ohne Formel konnte sie sich zunächst keine Methode vorstellen. Die Methode der Verknüpfung von Grundtätigkeiten zu Algorithmen erschließt sich Schülerinnen und Schülern dann aber meist sehr schnell und versetzt sie in die Lage eigene Algorithmen zu entwerfen und (umgangssprachlich) niederzuschreiben. Dass der Begriff „Formel“ interpretiert werden kann als ein Werkzeug, das zur Lösung taugt, zeigt die Überschrift eines Schülers (LK 13) über seinen selbst entwickelten Algorithmus: „‚Formel‘ für eine Euler-Tour [...] (Computerfreundlich)“

Die Arbeit mit Graphen eröffnet ein ganz besonderes Experimentierfeld, wie es in der Mathematik selten anzutreffen ist. Die Struktur von Graphen ist so einfach, dass beim Erstellen von eigenen Beispielen kaum Fehler unterlaufen können. Die im gewählten Themenkanon zu betrachtenden Graphen müssen nur sehr wenige Voraussetzungen erfüllen. Gelegentlich werden nur einfache Graphen betrachtet (z. B. beim Satz über das mehrfache Vorkommen von Knotengraden) oder Bäume. Werden bestimmte Eigenschaften gesucht, wie etwa die Existenz einer Eulertour, so dienen als Experimentierbeispiele jegliche zusammenhängenden Graphen. Es werden also stets nur sehr wenige und leicht zu überprüfende Voraussetzungen benötigt, so dass Schülerinnen und Schüler ohne Sorge vor falschen Beispielen selbständig eigene Graphen erfinden können, um Vermutungen zu finden oder bestimmten Ideen nachzugehen.

Gerald A. Goldin sieht in der Möglichkeit, mit einfachen heuristischen Methoden zu arbeiten, die Chance, Frustrationen zu vermeiden oder sogar zu überwinden und durch den Unterricht in diskreter Mathematik Erfolgserlebnisse zu schaffen (Goldin [7], S. 60, Hervorhebung durch d. Verf.): „Anticipating the frustration, and channeling it toward the adoption of better or different problem-solving strategies, is within reach if it is taken as an explicit goal of discrete mathematical instruction. In short, we should set out to develop *the affect of success* through discrete mathematics – the pathways and structures whereby previously unsuccessful students come to feel, **I am really**

somebody when I do mathematics like this!“

5 Rückmeldungen von Schülerinnen und Schülern

Abschliessend sind einige Kommentare von Schüler/innen der Klassen 8 und 13 zusammengestellt, die stellvertretend sowohl für die insgesamt sehr positiven Reaktionen der Lerngruppen als auch für den Gesamteindruck der beteiligten Lehrpersonen stehen.[14] Diese Einzeläußerungen sind kein statistisch signifikantes Material zur Bewertung des in diesem Artikel skizzierten Ansatzes. Wir halten sie dennoch für aufschlussreich und gerade für interessierte Lehrerinnen und Lehrer für durchaus ermutigend, sich an einen solchen Unterricht zu wagen.Weitere Forschungsarbeiten, die u.a. die aufgestellten Thesen empirisch untersuchen, sind im Gange bzw. in Planung.[15]

- *Wie hat dir das Thema gefallen? (Klasse 8)*
  - Besser als Mathe. Sehr Gut
- *Was hat dir noch gefallen/nicht gefallen? (Klasse 8)*
  - gut: Antworten nicht in mundgerechten Häppchen vorgekaut, sondern selber ausprobieren müssen.
  - Dass Diskrete Mathematik noch erforscht wird
  - Man muss wenig rechnen
- *Wie hat Ihnen das Thema gefallen? (Klasse 13)*
  - Perfekt! Total beeindruckend. Das Thema hat mich so vereinnahmt, dass ich über Wege auf meinem Duschvorhang nachgedacht habe.
  - [. . .] Man konnte gut frei arbeiten und eigene Ideen entwickeln
  - gut, interessant, wirft spannende Aspekte der Mathematik in Verbindung mit der Realität auf
  - Ich fand das Thema interessant. Es war etwa komplett anderes, als der normale Unterrichtsstoff (Gleichungen, Formeln, Zahlen) ich fand es gut, einen neuen Bereich kennen zu lernen.
  - Interessant, weil es mal etwas anderes war, aber schwer fassbar am Anfang, weil man keine konkreten Anhaltspunkte, keine konkreten Lösungen/Lösungsverfahren hatte. Man konnte gut frei arbeiten und eigene Ideen entwickeln.
- *Hat sich Ihr Bild von Mathematik oder Ihre Einstellung zur Mathematik durch die Arbeit an dem Thema verändert? Wenn ja, wie? (Klasse 13)*
  - Man hat gesehen, dass nicht alles nur konkret auf Formeln zurückzuführen ist. Außerdem hat man mal eine direkte Anwendung von theoretischen mathematischen Problemstellungen erfahren. Mathematiker sind in meinen Augen also nicht mehr die bloßen Theoretiker.
  - Einstellung zu Mathe nicht verändert, aber der Mathe-Horizont hat sich stark erweitert.
  - Wie gesagt, ist dieses Thema nicht nur theoretisch mit Zahlen und Formeln aufgebaut, so dass man mit vielen praktischen Arbeiten und Selbstversuche auf eine Lösung stößt. Ich hätte mich ohne diese Unterrichtsstunden nie mit dem Thema beschäftigt und hätte auch nie gedacht, dass das was mit Mathe zu tun hat.

[14] Es nahmen insgesamt über 140 Schülerinnen und Schülern an den Unterrichtsversuchen (s. o.) teil. Die abgedruckten Kommentare sind Fragebögen zu den Unterrichtsversuchen am Wildermuth-Gymnasium Tübingen, 2002, und am Wieland-Herzfelde-Gymnasium Berlin-Weißensee, 2005, entnommen.

[15] Promotionsprojekt Benjamin Rawe (Hochschule Vechta), seit Oktober 2008.

– Es war ein gutes Beispiel für die Nützlichkeit der Mathematik im Alltag, selbst und vor allem bei komplizierten Problematiken, wie die Optimierung von Wegen.

Diese Antworten zeigen, dass die eingangs formulierten Ziele mit einem solchen Unterricht durchaus erreicht werden können. Immer wieder betonen Schülerinnen und Schüler die Andersartigkeit der diskreten Mathematik im Vergleich zur klassischen Schulmathematik. Ein Kind aus einer 5. Klasse[16] formulierte dies am Ende einer Projektwoche zum Thema „Optimale Wege" besonders pointiert:

> Was hast du in dieser Woche dazugelernt?
> „Dass Mathematik manchmal kein[e] Mathematik ist."

6 Schlussbemerkung

Die hier vorgestellten Themen haben in Berlin Eingang in den Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I gefunden[17] und müssen sich dort natürlich nun bewähren. Wir haben in diesem Artikel auf Ausführungen zur Curriculumsdiskussion verzichtet. Unsere Beobachtung, auch im Rahmen von etlichen Lehrerfortbildungen (bundesweit), ist aber, dass es eine ganze Reihe von Lehrkräften gibt, die es möglich machen, unabhängig von den in den Lehrplänen festgeschriebenen Inhalten Unterrichtseinheiten zur kombinatorischen Optimierung durchführen zu können. Sie füllen damit die durch die Bildungsstandards geöffneten inhaltlichen Freiräume. Zudem fügt sich die Thematik hinsichtlich der zu erwerbenden prozessbezogenen Kompetenzen nahtlos in das bestehende Curriculum ein. Sie ist voraussetzungslos auch in tieferen Klassenstufen behandelbar und bietet viele Möglichkeiten zur Förderung des Erwerbs der Kompetenzen „Modellieren", „Problemlösen", „mathematische Darstellungen verwenden", „Argumentieren" und „Kommunizieren".

Literatur

[1] Ian Anderson. *A first course in Combinatorial Mathematics*. Oxford University Press, New York, 2. Auflage, 1989.

[2] Katja Biermann, Martin Grötschel und Brigitte Lutz-Westphal. *Besser als Mathe! Angewandte Mathematik aus dem Matheon zum Mitmachen*. Vieweg, Wiesbaden/Braunschweig, erscheint 2009.

[3] Andreas Büchter und Timo Leuders. *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen*. Cornelsen Scriptor, Berlin, 2005.

[4] Jürgen Floer. Optimierung von Netzwerken - Kürzeste Wege und größte Flüsse. *Praxis der Mathematik* **1**, No. 19, 1–6, 40–44 (1977).

[5] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1*. Klett, Stuttgart, 1. Auflage, 1973.

[6] Peter Gallin und Urs Ruf. *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen: Grundzüge einer interaktiven und fächerübergreifenden Didaktik*. Kallmeyer, Seelze-Velber, 1998.

[7] Gerald A. Goldin. Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **36**, No. 2, 56–60 (2004).

[16] Fragebogenantwort Februar 2008, Wartburg-Grundschule Berlin-Moabit

[17] [15], Module W1 7/8 und W1 9/10

[8] Britta Habdank-Eichelsbacher und Hans Niels Jahnke. Authentische Erfahrungen mit Mathematik durch historische Quellen. am 28.3.2006 geladen von: `http://www.uni-essen.de/didmath/texte/jahnke/hnj_pdf/tunnel.pdf`.

[9] Stephan Hußmann und Timo Leuders. Mathematik treiben, authentisch und diskret – eine Perspektive für die Lehrerausbildung. *in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Franzbecker, Hildesheim, 2006.

[10] Stephan Hußmann und Brigitte Lutz-Westphal. *Kombinatorische Optimierung erleben. In Studium und Unterricht*. Vieweg, Wiesbaden/Braunschweig, 2007.

[11] Thomas Jahnke. Zur Authentizität von Mathematikaufgaben. am 29.3.2006 geladen von `http://www.math.uni-potsdam.de/prof/o_didaktik/a_mita/aa/Publ/vortr`.

[12] Brigitte Lutz-Westphal. *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht*. Dissertation, Technische Universität Berlin, 2006.

[13] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hg. *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwickung*. Veröffentlichungen der Kultusministerkonferenz. Wolters Kluwer Deutschland, München, 2004.

[14] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, Hg. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Wolters Kluwer Deutschland, München, 2004.

[15] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin, Hg. *Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I. Jahrgangsstufe 7-10, Hauptschule, Realschule, Gesamtschule Gymnasium*. Berlin, 2006.

[16] Marja Van den Heuvel-Panhuizen. Realistic Mathematics Education. Work in progress. am 5.4.2006 geladen von `http://www.fi.uu.nl/en/rme/`, 1998.

[17] Marja Van den Heuvel-Panhuizen. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. am 5.4.2006 geladen von `http://www.fi.uu.nl/en/rme/TOURdef+ref.pdf`, 2000.

[18] Hans-Joachim Vollrath. *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001.

[19] Bernd Westermann. Anwendungen und Modellbildung. *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II* (Timo Leuders, Hg.). Cornelsen Scriptor, Berlin, 2003.

[20] Alexander Israel Wittenberg. *Bildung und Mathematik. Mathematik als exemplarisches Gymnasialfach*. Klett, Stuttgart, 1963.