

Mathematische Preisplanung im ÖPNV

Diplomarbeit
bei Prof. Dr. M. Grötschel

vorgelegt von Marika Neumann
am Fachbereich Mathematik der
Technischen Universität Berlin

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Preisgestaltung im öffentlichen Verkehr	5
2.1	Nahverkehr	6
2.2	Bahn- und Flugverkehr	11
2.2.1	Beispiel Niederlande	11
2.2.2	Revenue Management	12
2.2.3	Revenue Management im Bahnverkehr	15
2.3	Zusammenfassung	16
3	Markt- und Preistheorie	19
3.1	Markt	19
3.2	Nachfragefunktion	20
3.3	Preiselastizität	21
3.3.1	Cobb-Douglas Funktion	22
3.4	Gewinnmaximierung eines Monopolisten	23
3.4.1	(Allgemeine) volkswirtschaftliche Betrachtungsweise	24
3.4.2	2. Betrachtungsweise	26
3.5	Anwendung im ÖPNV	27
3.5.1	Optimale Preisbestimmung	27
3.5.2	Preiselastizität im ÖPNV	29
4	Fahrpreisplanungsmodell	31
4.1	Allgemeines Modell	31
4.1.1	Anwendungen	34
4.2	Diskussion des Modells	35
4.2.1	Wirtschaftliche und soziale Beurteilung	35
4.2.2	Nachfragefunktion im ÖPNV	36
4.3	Zusammenfassung	38
5	Modell mit elementaren Funktionen	41
5.1	Bedingungen an die Modellnachfragefunktion	41
5.2	Beispiele von Modellnachfragefunktionen	42
5.3	Mathematische Diskussion	43

5.3.1	Lineare Nachfragefunktion	44
5.3.2	Quadratische und exponentielle Nachfragefunktion . .	49
5.4	Diskussion	50
6	Entscheidungsmodell	53
6.1	Modelle diskreter Entscheidungen	54
6.2	Logit Modell	55
6.2.1	Gumbel-Verteilung	56
6.2.2	Herleitung des Logit Modells	57
6.2.3	Eigenschaften des Logit Modells	58
6.3	Anwendung auf das Fahrpreisplanungsmodell	60
6.4	Diskussion	64
7	Berechnungen	67
7.1	Daten	67
7.1.1	Daten Niederlande	67
7.1.2	Daten Potsdam	68
7.2	Berechnungen mit elementaren Funktionen	69
7.2.1	Parameter der elementaren Funktionen	69
7.2.2	Wahl von γ	71
7.2.3	Optimierung mit Matlab	72
7.2.4	Beispiel Zonentarif Potsdam	74
7.2.5	Beispiel Grund-, Kilometerpreis Potsdam	77
7.2.6	Beispiel Grund-, Kilometerpreis Niederlande	79
7.2.7	Zusammenfassung	81
7.3	Berechnungen Entscheidungsmodell	82
7.3.1	Daten und Parameter	83
7.3.2	Optimierung	86
7.3.3	Beispiel Bahnkarten-, Standardticket Niederlande . . .	87
7.3.4	Beispiel Einzel-, Monatsticket Potsdam	91
7.3.5	Zusammenfassung	101
8	Zusammenfassung und Ausblick	103
A	Häufig verwendete Notation	105
B	Berechnungsbeispiel mit Matlab	109

Kapitel 1

Einleitung

„Im Vergleich mit anderen deutschen Ballungsräumen bietet Berlin zwar ein sehr gutes Verkehrsangebot an; die Produktion dieses Angebots erfolgt jedoch zu teuer. Auf Dauer wird der Berliner Haushalt diesen hohen Zuschuss nicht mehr zahlen können. Deshalb zwingt nicht die zukünftige Öffnung des ÖPNV-Marktes, sondern vor allem die Situation des Berliner Landeshaushaltes zu einer deutlichen Verbesserung der Wirtschaftlichkeit.“

NAHVERKEHRSPLAN BERLIN 2000/2001 UND 2004 [35]

Die Wirtschaftslage im öffentlichen Personennahverkehr (ÖPNV) ist nicht nur in Berlin meist defizitär. Die Herstellung und die Aufrechterhaltung eines attraktiven Verkehrsangebots kann oft nur durch hohe staatliche Subventionen erfolgen. Ein Fahrpreis, der die Kosten vollständig decken würde, ist aus politischer und sozialer Sicht häufig nicht durchsetzbar. Dennoch ist es von Interesse, ein möglichst gerechtes Preissystem zu entwickeln, das die Einnahmen des öffentlichen Verkehrsunternehmens maximiert und das Defizit reduziert. Gleichzeitig müssen politische und soziale Vorgaben erfüllt werden (z. B. gab es in Berlin große Proteste, als das Sozialticket abgeschafft wurde).

Wir entwickeln in dieser Arbeit daher ein Modell, das die Einnahmen zu einem gegebenen Tarifsystem maximiert und als mögliche Nebenbedingungen bestimmte (soziale) Voraussetzungen erfüllt. Dieses Modell nennen wir das *Fahrpreisplanungsmodell*.

In der Literatur wurden bereits verschiedene Ansätze verfolgt, ein optimales Preisniveau zu bestimmen. Hamacher und Schöbel [14], [15] entwickelten ein Modell zur Bestimmung eines Zonentarifs mit dem Ziel, dass der neu berechnete (Zonen-)Preis und der alte gegebene Preis für möglichst viele Strecken wenig voneinander abweichen. Kocur und Hendrickson [16] und De Borger et al. [8] stellten ein Modell zur Maximierung der Einnahmen bzw.

zur Maximierung der Wohlfahrt vor und führten Beispielrechnungen durch. Häufig werden nur theoretische Konzepte vermittelt und diskutiert, z. B. von Pederson [21]. Einige Ansätze werden in Kapitel 3 genauer vorgestellt.

Das Neuartige an unserem Modell ist die Einbeziehung des zugrunde liegenden Verkehrsnetzes bzw. Liniennetzes. Jede Verbindung zwischen zwei Stationen kann separat behandelt werden, d. h. es ist z. B. möglich in stark und schwach frequentierte Strecken zu unterscheiden oder besondere Eigenschaften zu berücksichtigen, wie etwa eine sehr schnelle Ringbahn. Dadurch kann eine effektive und differenzierte Preisgestaltung durchgeführt werden.

Eine Grundlage unseres Fahrpreisplanungsmodells ist die Annahme, dass sich die Beziehung zwischen Preis und Anzahl verkaufter Tickets als eine Nachfragefunktion darstellen lässt. Mit der Nachfragefunktion und einem gegebenen Tarifsystem lassen sich die erwarteten Einnahmen relativ leicht bestimmen. Die Schwierigkeit besteht darin, eine Funktion zu finden, die das Nachfrageverhalten der Passagiere möglichst genau abbildet. Wir werden mehrere Ansätze verfolgen, diese Funktion zu konstruieren. Insbesondere werden Nachfragefunktionen, die in der Literatur Anwendung finden, vorgestellt. Diese werden aus Entscheidungsmodellen hergeleitet, siehe Maier und Weiss [18] oder Ben-Akiva und Lerman [3]. Die Entscheidungsmodelle integrieren wir in unser Fahrpreisplanungsmodell (Kapitel 6). Wir werden sehen, dass wir dadurch ein erklärbares und berechenbares Modell erhalten.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden die Preissysteme und die Preisgestaltung, die zur Zeit in öffentlichen Verkehrsunternehmen Anwendung finden, vorgestellt. Hierbei werden die Möglichkeiten gezeigt, wie komplex ein Preissystem sein kann.

In Kapitel 3 wird die Beziehung zwischen Preis und Nachfrage sowie die Gewinnmaximierung eines Unternehmens behandelt. Mit diesem Kapitel werden die wirtschaftlichen Grundlagen für unser Fahrpreisplanungsmodell gelegt und die bereits erwähnten Modelle aus der Literatur behandelt.

Unser Fahrpreisplanungsmodell wird in Kapitel 4 vorgestellt. Wir zeigen die Anwendbarkeit auf einige Preissysteme. Dazu greifen wir auf Preisgestaltungskonzepte aus Kapitel 2 zurück. Außerdem erfolgt eine ausführliche Diskussion unseres Modells.

Wir zeigen zwei Möglichkeiten, die Nachfragemenge für gegebene Preise zu bestimmen.

Zunächst verwenden wir in Kapitel 5 elementare Funktionen zur Modellierung der Nachfragemenge in Abhängigkeit vom Preis.

In Kapitel 6 stellen wir Entscheidungsmodelle vor, mit denen man die Nachfragemengen bestimmen kann. Insbesondere konzentrieren wir uns auf ein spezielles Entscheidungsmodell, das Logit Modell.

Die in den Kapiteln 5 und 6 vorgestellten Modellierungen zur Nachfragemenge werden in unser Fahrpreisplanungsmodell integriert. Auf dieser

Grundlage können wir Berechnungen mit unserem Fahrpreisplanungsmodell unter Verwendung von elementaren Funktionen bzw. unter Verwendung von Entscheidungsmodellen durchführen. Beispiele dazu werden in Kapitel 7 vorgestellt und diskutiert.

Kapitel 8 schließt diese Arbeit ab. Hier werden die Ergebnisse zusammengefasst und mögliche Weiterentwicklungen des Fahrpreisplanungsmodells genannt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Martin Grötschel für die Vergabe des reizvollen und aktuellen Diplomthemas bedanken. Weiterhin seien die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Konrad-Zuse-Zentrum Berlin erwähnt.

Ralf Borndörfer und Marc Pfetsch danke ich für die außerordentlich interessante Arbeit in ihrem Projekt „Strategische Planung im Verkehr“ und für ihre ermunternde Unterstützung.

Ich danke Norman Rochau für das Lesen und Kommentieren einer frühen Version und meinem Vater für das Korrekturlesen sowie für seine wertvollen Anmerkungen.

Mein ganz besonderer Dank geht an meine Familie und an Gregor Karbstein, der im letzten halben Jahr stets ein offenes Ohr für mich hatte.

Kapitel 2

Preisgestaltung im öffentlichen Verkehr

Es gibt verschiedene Möglichkeiten die Preise im öffentlichen Verkehr festzulegen. Dabei kann man eine Preisgestaltung bezüglich mehrerer Faktoren, z. B. Raum, Zeit, Personengruppen, Nutzungshäufigkeit und Verkehrsmittel betrachten.

Drei sehr intuitive Beispiele zur räumlichen Preisgestaltung sind die folgenden:

- Das einfachste Preissystem ist ein Einheitspreis. In diesem Fall sind die Preise aller Fahrten gleich, unabhängig von dem Start- und Zielort der Fahrt. Eine Fahrt durch das ganze Verkehrsgebiet ist genauso teuer wie eine Fahrt zwischen zwei benachbarten Stationen.
- Ein differenzierteres Preissystem ist der Entfernungstarif. Bei diesem Tarif steigt der Preis mit der Entfernung vom Start- zum Zielort.
- Ein Kompromiss aus den ersten beiden Preissystemen ist der Zonentarif. In diesem Fall wird das öffentliche Verkehrsgebiet in disjunkte Teilgebiete, den Zonen, unterteilt. Entweder gibt es für jede Zonenkombination, in der Start- bzw. Zielstation liegen, einen festen Preis (Zonentarif mit festen Preisen), oder der Preis bestimmt sich durch die Anzahl der durchfahrenen Zonen (Zonenzähltarif).

Eine zeitliche Preisgestaltung ist eine Einteilung

- in Haupt- und Nebenverkehrszeit,
- nach Reisedauer oder
- nach zeitlichen Abstand zwischen Ticketkauf und Fahrtantritt.

Eine Einteilung in Personengruppen (z. B. Schüler, Studenten, Senioren) und Nutzungshäufigkeit (z. B. Monatsticket, Einzelticket) wird in den meisten öffentlichen Verkehrssystemen durchgeführt.

Bezüglich der Verkehrsmittel kann in Schnelligkeit und Komfort unterschieden werden.

In den nächsten Abschnitten werden einige Beispiele zur Preisgestaltung in der Praxis vorgestellt. In Deutschland ist im öffentlichen Nahverkehr der Zonentarif weit verbreitet. Eine zeitliche Preisdifferenzierung oder eine Differenzierung nach Verkehrsmitteln findet hier im Allgemeinen nicht statt. Beispiele zu dieser Form der Preisgestaltung im Nahverkehr folgen im Abschnitt 2.1.

Die Preisgestaltung in anderen Gebieten des öffentlichen Verkehrs, z. B. Bahn-, Fernverkehr und Flugverkehr ist im Allgemeinen komplizierter. In Abschnitt 2.2 betrachten wir ein Tarifsystem im Bahnverkehr am Beispiel von Niederlande. Dieses Beispiel ist außerdem von Interesse, da wir im Kapitel 7 für das niederländische Intercity Netz die Preise optimieren werden.

Um einen Eindruck zu bekommen, was theoretisch in der Preisgestaltung alles möglich ist, wenden wir uns außerdem im Abschnitt 2.2 der Preisgestaltung im Flugverkehr zu. Besonders in diesem Bereich wurde in den letzten Jahren ein komplexes und vielschichtiges Preissystem entwickelt.

Abschnitt 2.3 schließt dieses Kapitel ab. Wir fassen die Möglichkeiten zur Preisgestaltung zusammen, die auf den Nahverkehr angewendet werden können. Dazu benennen wir die Voraussetzungen und die Ziele, die ein Tarifsystem im Nahverkehr (laut dem Nahverkehrsplan von Berlin [35]) erfüllen muss.

2.1 Nahverkehr

Der öffentliche Personenverkehr in Deutschland besteht aus einer Vielzahl von Transportunternehmen, die sich in einzelne Verbände zusammengeschlossen haben. Jeder dieser Verbände hat ein eigenes Preissystem festgelegt.

Meistens wird im Nahverkehr das öffentliche Verkehrsnetz in mehrere Gebiete, z. B. Zonen, Waben, Ringe eingeteilt. Neben dieser räumlichen Tarifeinteilung gibt es oftmals eine Einteilung nach der Nutzungshäufigkeit (z. B. gibt es Einzeltickets, Tageskarten und Monatskarten) und eine Einteilung nach Personengruppen (z. B. gibt es Rabatte für Schüler und Auszubildende).

In der Praxis kommen beide oben erwähnten Zonentarife (Zonenzähltarif und Zonentarif mit festen Preisen) vor. Beispiele werden in den Tabellen 2.1, 2.2, 2.3 und 2.4 und in den Abbildungen 2.1, 2.2 und 2.3 vorgestellt.

Im Tarifverbund Brandenburg und Berlin gibt es eine Kombination des Zonenzähltarifs und des Zonentarifs mit festen Preisen. Die Städte Berlin,

Fahrkarte	AB	BC	ABC
Einzelfahrausweis (Regeltarif)	2,00	2,25	2,60
Tageskarte (Regeltarif)	5,60	5,70	6,00
Monatskarte	64,00	65,50	79,50
Jahreskarte	640,00	655,00	795,00

Tabelle 2.1: *Berlin*: Fahrpreise in Euro laut Internetseite des VBB [38]. Stand Februar 2005.

Verkehrsgebiet	Einzelfahrausweis (Regeltarif)	Monatskarte
Brandenburg a. d. H., Cottbus, Frankfurt(Oder)		
AB	1,10	32,50
BC	1,10	32,50
ABC	2,00	49,50
Potsdam		
AB	1,40	32,50
BC	1,40	32,50
ABC	2,20	49,50
Landkreise		
bis 2 Waben	1,20	27,60
bis 3 Waben	1,70	
bis 4 Waben	2,20	50,10

Tabelle 2.2: *Brandenburg*: Fahrpreise in Euro laut Internetseite des VBB [38]. Stand Februar 2005.

Brandenburg, Cottbus und Potsdam haben einen Zonentarif mit festen Preisen, wobei es nicht nur darauf ankommt, in welchen Zonen Start- und Zielort liegen, sondern welche Zonen durchfahren werden. Im übrigen Land Brandenburg gilt ein Zonenzähltarif, vergleiche Abbildung 2.1 und Tabelle 2.1 und 2.2 [38].

In München berechnet sich der Preis für eine Fahrt mit einem öffentlichen Verkehrsmittel durch die Anzahl der durchfahrenen Zonen, vergleiche Abbildung 2.2 und 2.3, Tabelle 2.3, und 2.4 [34].

Die Beliebtheit des Zonentarifs lässt sich damit erklären, dass ein einfacher Einheitspreis als zu ungerecht empfunden wird und ein Entfernungstarif im Nahverkehr sehr unpraktisch ist. Der Passagier müsste für jede Verbindung den Abstand bzw. den Preis wissen. Ein Fahrscheinerwerb oder ein Rabattsystem für Vielfahrer im Zeitalter des Papierfahrscheins ist damit für die Passagiere nicht einfach zu durchschauen. Daher hat sich vielerorts der Zonentarif durchgesetzt, der einen Kompromiss zwischen Einheitstarif und Entfernungstarif darstellt.

Verkehrsverbund Berlin-Brandenburg:
Das Tarifgebiet des VBB umfasst die Länder Berlin und Brandenburg.
Das Verbundtarifgebiet ist in Flächen, so genannte Waben, eingeteilt. Der Fahrpreis berechnet sich aus den jeweils durchfahrenen Flächen unabhängig davon, welche Verkehrsmittel (Bus oder Bahn) Sie benutzen.
Für die Stadt Berlin und die kreisfreien Städte Brandenburg an der Havel, Cottbus, Frankfurt (Oder) und Potsdam wurden Tarifbereiche festgelegt. Die Teilbereiche A und B umfassen jeweils das eigentliche Stadtgebiet, wobei die äußere Grenze des Teilbereichs B mit der Stadtgrenze weitgehend identisch ist. Der Teilbereich C erstreckt sich, gemessen von der Stadtgrenze, bis zu einer Entfernung von 10 bis 15 km ins Umland. Fahrausweise erhalten Sie je nach Bedarf für die kombinierten Teilbereiche AB, BC sowie ABC.
Im übrigen Land Brandenburg berechnet sich der Fahrpreis aus der Anzahl der durchfahrenen Waben.

Abbildung 2.1: *Brandenburg/Berlin:* Beschreibung des Tarifplans laut Internetseite des VBB [38].

Geltungsbereiche	Wochenkarte	Monatskarte	Jahreskarte
bis 2 Ringe	9,70	36,00	342,00
bis 3 Ringe	11,70	43,50	411,00
bis 4 Ringe	14,00	52,00	492,00
bis 5 Ringe	16,10	59,50	564,00
bis 6 Ringe	18,40	68,00	645,00
bis 7 Ringe	20,60	76,00	720,00
bis 8 Ringe	22,60	83,50	792,00
bis 9 Ringe	24,80	92,00	873,00
bis 10 Ringe	27,00	100,00	948,00
bis 11 Ringe	29,10	107,50	1020,00
bis 12 Ringe	31,10	115,00	1092,00
bis 13 Ringe	33,40	123,50	1173,00
bis 14 Ringe	35,60	131,50	1248,00
bis 15 Ringe	37,60	139,00	1320,00
bis 16 Ringe	40,00	148,00	1404,00

Tabelle 2.3: *München:* Fahrpreise in Euro für Zeitkarten (Isaar Card) laut Internetseite des MVV [34]. Stand Februar 2005.

Münchener Verkehrs- und Tarifverbund GmbH - MVV:		
<u>Zonen</u>		
Für den Bartarif ist das MVV-Gebiet in vier Zonen eingeteilt.		
Der Fahrpreis ergibt sich aus der Zahl der befahrenen Zonen. Wird ein und dieselbe Zone auf einer Fahrt zweimal durchfahren, ist diese Zone auch zweimal zu bezahlen. Ab vier Zonen steigt der Preis jedoch nicht mehr.		
Für jede Anzahl befahrener Zonen gibt es eine spezielle Einzelfahrkarte. Bei der Streifenkarte müssen pro befahrener Zone zwei Streifen entwertet werden.		
Ganz München und einige Umlandgemeinden (= erweitertes Stadtgebiet von München) bilden zusammen eine Zone (im Tarifplan weiß), den sogenannten Innenraum. Das gesamte übrige Verbundgebiet ist nochmals in drei Zonen (im Tarifplan grün, gelb, rot) unterteilt. Diese drei Zonen, die München kreisförmig umschließen, bilden zusammen den Außenraum. Mit der Anzahl der Zonen steigt auch die mögliche Höchstfahrzeit der Fahrkarte.		
<u>Ringe</u>		
Für den Zeitkartentarif sind die Zonen nochmals feiner unterteilt, in je vier Ringe. Insgesamt ist das Verbundgebiet damit für Zeitkarten in 16 Ringe gegliedert. Die Ringe 1 - 4 entsprechen dabei zusammen dem Innenraum, die Ringe 5 - 16 dem Außenraum. Die Ringe 1 - 16 bilden das Gesamtnetz.		
Der Fahrpreis richtet sich nach der Zahl der befahrenen Ringe (Minimum: zwei benachbarte Ringe).		

Abbildung 2.2: *München:* Beschreibung des Tarifplans laut Internetseite des MVV [34].

Anzahl Zonen	Preis in Euro	Preis in EURO (Streifenkarte)
1	2,10	1,90
2	4,20	3,80
3	6,30	5,70
4 und mehr	8,40	7,60

Tabelle 2.4: *München:* Fahrpreis für Einzelfahrkarten laut Internetseite des MVV [34]. Der Preis der letzten Spalte gilt für bargeldloses Zahlen bzw. Nutzen einer Streifenkarte. Stand Februar 2005.

10KAPITEL 2. PREISGESTALTUNG IM ÖFFENTLICHEN VERKEHR

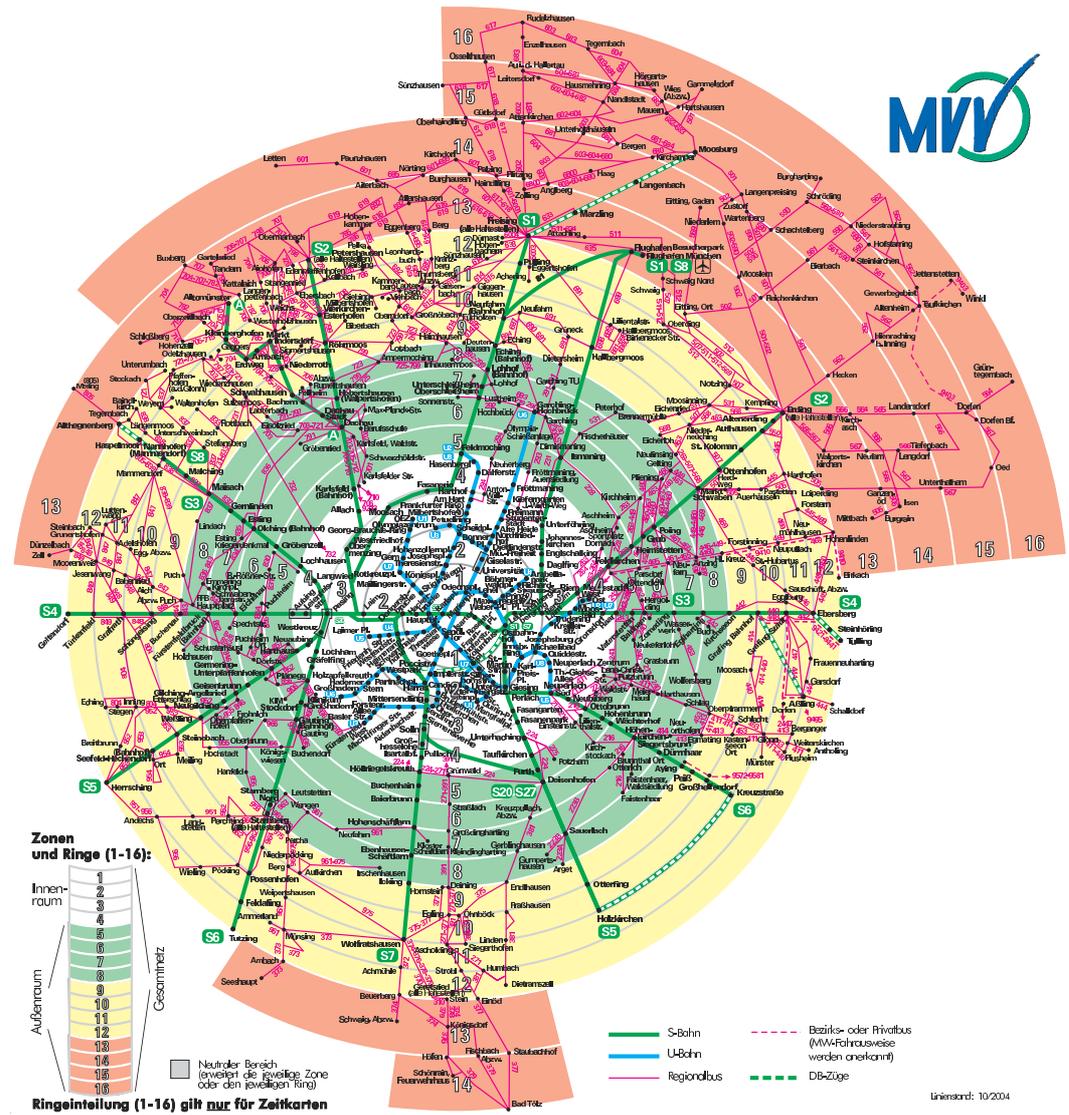


Abbildung 2.3: München: Tarifplan des MVV [34].

2.2 Bahn- und Flugverkehr

Die Möglichkeiten zur Preisgestaltung im Fernverkehr sind weit umfangreicher als im Nahverkehr. Neben Rabatten nach Nutzungshäufigkeit wie Monatskarte (z. B. bei Nederland Spoorwegen Reizigers) und BahnCards (bei der Deutschen Bahn) können auch zeitbezogene Rabatte, z. B. sogenannte Frühbucherrabatte gewährt werden, da die Zugtickets und Platzkarten meist im Voraus gebucht werden.

Tatsächlich deutet sich an, dass im Bahnverkehr einige Preisplanungsmodelle aus dem Flugverkehr übernommen werden. Die Preisplanung im Flugverkehr ist sicherlich das am meisten erforschte Thema über die Preisplanung im öffentlichen Verkehr. Sie wird unter dem Begriff des Revenue Managements zusammengefasst und in Abschnitt 2.2.2 vorgestellt.

Im Abschnitt 2.2.3 betrachten wir Beispiele, bei denen einige Ideen des Revenue Managements aus dem Flugverkehr auf die Bahn übertragen wurden.

Zunächst folgt ein Beispiel aus dem Bahnverkehr, bei dem ein entfernungsabhängiges Preissystem umgesetzt wurde. Dieses Beispiel aus den Niederlanden wurde gewählt, weil wir später mit den Daten des niederländischen Intercity-Netzes rechnen und ein ähnliches Preissystem mit dem Fahrpreisplanungsmodell optimieren werden.

2.2.1 Beispiel Niederlande

Für unsere Berechnungen haben wir einige Verbindungen zwischen je zwei Stationen aus dem NSR Netz (Nederland Spoorwegen Reizigers) ausgewählt. Für jede Verbindung $j = 1, \dots, 210$ ist der Preis p_j für ein Einzelticket zweiter Klasse im Normaltarif und der Abstand ℓ_j zwischen den Stationen aus dem Internet [37] entnommen.

Diese Preise (Stand 2004) sind abhängig von den Abständen in Abbildung 2.4 dargestellt und mit der Methode der kleinsten Quadrate durch folgende stückweise lineare Funktion angenähert worden

$$f(\ell) = \begin{cases} 1,02 + 0,122 \cdot \ell & 0 \leq \ell < 150 \\ 5,247 + 0,093 \cdot \ell & 150 \leq \ell < 300 \\ 24,6656 + 0,0285 \cdot \ell & \ell \geq 300 \end{cases} \quad (2.1)$$

Die Ränder des jeweiligen Definitionsbereichs sind nach visuellem Ermessen gewählt worden. Die Funktion ist an diesen Stellen nicht stetig. Für den quadratischen Fehler gilt

$$\sum_{j=1}^{210} (p_j - f(\ell_j))^2 \approx 1,34.$$

In diesem Fall zerfällt der Preis für eine Verbindung j in einen Grundpreis

12KAPITEL 2. PREISGESTALTUNG IM ÖFFENTLICHEN VERKEHR

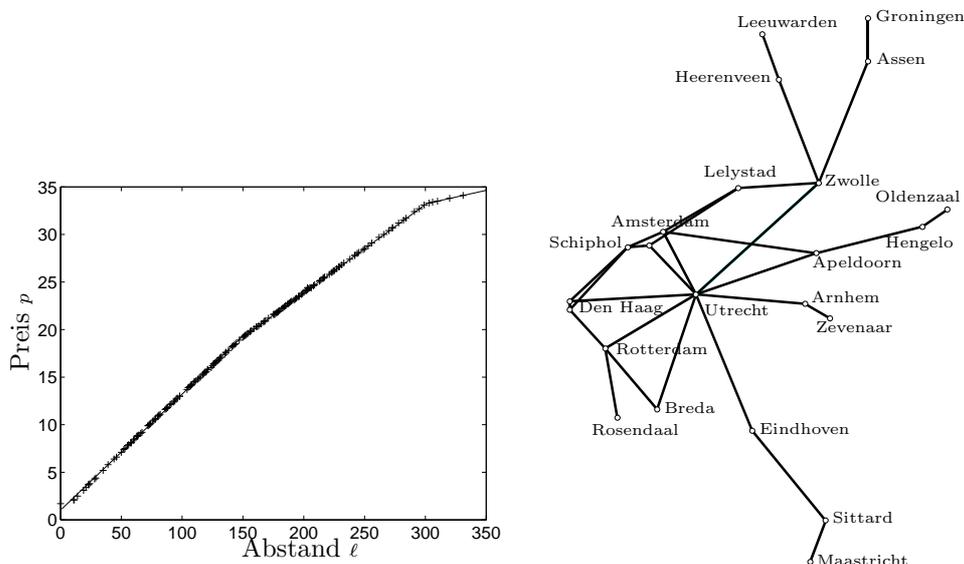


Abbildung 2.4: *Links:* Bahnpreise in den Niederlanden (Stand 2004) angenähert mit einer stückweisen linearen Funktion. *Rechts:* Niederländisches Bahnnetz.

p_G (ein Preis, der bei jedem Reiseantritt pauschal bezahlt werden muss) und in einen Entfernungspreis p_k multipliziert mit dem Abstand zwischen den Stationen des Paares j . Grundpreis und Entfernungspreis sind für alle Verbindungen, deren Entfernungen in einem bestimmten Intervall liegen (z. B. zwischen 0 und 150), fest. Über diese Bedingung sind die Preise einer Menge von Verbindungen miteinander gekoppelt. Generell kann der Grundpreis und der Entfernungspreis aber auch für alle Verbindungen fest sein. Die Fahrpreise der Verbindungen werden dann berechnet durch

$$f_j(p_G, p_k) = p_G + p_k \cdot \ell_j \quad \text{für alle Verbindungen } j,$$

wobei ℓ_j der Abstand zwischen den Stationen der Verbindung j ist.

2.2.2 Revenue Management

Im Flugverkehr ist das Revenue Management seit den 1970er Jahren viel untersucht und entwickelt worden. Es umfasst eine Reihe von Methoden zur Maximierung der Einnahmen. Seit den 1990er Jahren wird nun auch versucht diese Herangehensweise auf den Bahnverkehr zu übertragen.

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Überblick über das Revenue Management gegeben. Für weiterführende Informationen sei auf den Übersichtsartikel von McGill und van Ryzin [19] oder auf “Operations Research in the Airline Industry” von Gang Yu [31] verwiesen.

Die Idee beim Revenue Management ist, dass sich die Kunden in der Bereitschaft, einen bestimmten Preis für ein Gut zu zahlen, unterscheiden.

Das Gut soll nun so angeboten werden, dass möglichst viele Kunden den höchsten Preis zahlen, den sie zu zahlen bereit sind.

Um das zu erreichen, geht es speziell im Flugverkehr darum, bestimmte Buchungsklassen (zu verschiedenen Preisen) festzulegen und die Kapazitäten der Sitzplätze zu verwalten.

Jede Buchungsklasse hat bestimmte Restriktionen, z. B. Samstagnachtaufenthalt zwischen Hin- und Rückflug oder hohe Strafgeldern bei Stornierungen. Durch diese Restriktionen können z. B. Geschäftsreisende von Urlaubsreisenden getrennt werden. Geschäftsreisende sind meistens auf Flüge an Werktagen angewiesen und eher bereit, höhere Preise dafür zu bezahlen.

Die verschiedenen Buchungsklassen beziehen sich häufig auf das physisch gleiche Sitzinventar. Daher ist auch die Verwaltung dieses Sitzinventars sehr wichtig. Die Aufgabe besteht darin, zu entscheiden, wie viele Plätze für welche Buchungsklasse reserviert werden sollen. Die Reservierung erfolgt dabei dynamisch, d. h. je nach Nachfrage können die Kapazitäten der Sitzplätze, die für die verschiedenen Buchungsklassen reserviert waren, geändert werden. Dabei werden zwei untereinander konfliktionäre Ziele verfolgt: erstens die Maximierung des Durchschnittspreises aller Passagiere und zweitens die Maximierung der Anzahl der belegten Plätze.

Seit den 1970er Jahren wurden vier große Aspekte des Revenue Management erforscht: Vorhersagemodelle, Überbuchungen, Sitzplatzverwaltung und Preisfestlegung.

Sie werden im Folgenden kurz erläutert.

Vorhersagemodelle

Die Nachfragen nach Flugrouten in unterschiedlichen Buchungsklassen treffen zeitlich verteilt ein, und es ist ungewiss, wie groß die Nachfrage insgesamt ist. Eine Nachfrage nach einer Flugroute nennt man eine Buchungsanfrage. Eine Flugroute kann aus mehreren einzelnen Flugverbindungen bestehen. Jede Annahme über die Verteilung der Buchungsanfragen und ihr zeitliches Eintreffen hat Einfluss auf die Entscheidung, welche Buchungsanfrage akzeptiert wird und welche nicht. Jede Entscheidung kann sich auf viele folgende Buchungsanfragen auswirken (z. B. ist durch die Annahme der ersten Buchungsanfrage keine freie Kapazität für andere Flugrouten mehr vorhanden). Damit wirkt sich die Annahme über die Buchungsanfrageverteilung und das daraus resultierende Entscheidungsverhalten in einem starkem Maß auf den zu erzielenden Gewinn aus. Daher sind gute Modelle zur Nachfrageschätzung sehr wichtig.

Eine Möglichkeit ist, Prognosen über die Nachfrageverteilung aus den Daten der Vergangenheit zu entwickeln.

Überbuchungen

Dies ist das am längsten untersuchte Forschungsgebiet im Revenue Management (McGill und van Ryzin [19]). Es ist eng verbunden mit Vorhersagemodellen, da man hier Annahmen darüber treffen möchte, wie viele gebuchte Flüge später storniert werden oder wie viele Passagiere mit einem gültigen Ticket beim Abflug nicht erscheinen. Eine Überbuchungsregel ist, so lange Buchungen zuzulassen, wie die Wahrscheinlichkeit von „verweigerten Flügen“ (d. h. zur Abflugszeit erscheinen mehr Passagiere mit einem gültigen Flugticket als es Sitzplätze gibt) unterhalb einer vorgegebenen Grenze liegt.

Sitzplatzverwaltung

Es werden Regeln gesucht, mit denen die Kapazitäten der freien Sitzplätze für jede Buchungsklasse möglichst optimal (d. h. gewinnmaximierend) festgelegt werden.

Eine erste Regel, die auch den Grundstein für das Revenue Management legte (McGill und van Ryzin [19]), ist Littlewoods Regel. Sie gilt für zwei Preisklassen (f_1 rabattierter Preis und f_2 Vollpreis), die für das gleiche Sitzinventar gelten, und besagt, dass für die ermäßigte Buchungsklasse so lange Sitzplätze verkauft werden können, wie die Einnahmen an diesem Verkauf die erwarteten Einnahmen der zukünftigen Vollpreisbuchungen erreichen bzw. übersteigen, d. h.

$$f_1 \geq f_2 \cdot \mathbb{P}(Y \geq s),$$

wobei s die Anzahl der freien (verbleibenden) Sitzplätze ist und Y eine Zufallsvariable für die Nachfrage nach Tickets zum Vollpreis.

Im Laufe der Jahre wurde diese Regel immer weiter entwickelt, nicht nur vom Zwei-Preisklassen Modell zum Mehr-Preisklassen Modell, sondern auch von der Single-Leg Kontrolle (d. h. jede Flugverbindung wird für sich betrachtet) zur Start-Ziel Kontrolle. Bei der Start-Ziel Kontrolle werden sogenannte Netzwerkeffekte (z. B. durch die Annahme einer Buchung sind andere Flugrouten nicht mehr verfügbar) betrachtet. Diese Effekte können sehr weitreichend sein. Es geht darum, möglichst gut die Opportunitätskosten¹ zu schätzen, die eine Annahme-/Ablehnungsentscheidung verursacht und damit Regeln für die Entscheidung von Annahme oder Ablehnung einer Buchungsanfrage zu bestimmen.

Eine Möglichkeit ist die Berechnung von *Bid-Preisen*:

Dazu werden alle Flugrouten in direkte Flugverbindungen, sogenannte Legs, unterteilt. Für jeden Leg werden abhängig von den möglichen Kapazitäten einer Buchungsklasse und dem Preis dieser Buchungsklasse über alle Buchungsklassen und Flugrouten, die diesen Leg benutzen, sogenannte

¹Opportunitätskosten (oder Alternativkosten) entsprechen dem Wert der zweitbesten Verwendung eines Wirtschaftsgutes bzw. dem Wert der geopferten Alternative, Nordhaus und Samuelson [20].

Bid-Preise berechnet. Ein *Bid-Preis für eine Flugroute* ist die Summe aller *Bid-Preise der Legs*, die die Flugroute benutzt. Eine Buchung wird nur dann akzeptiert, wenn der Preis dieser Buchung wenigstens so groß ist wie der Bid-Preis der Flugroute. Für mehr Informationen siehe Gang Yu [31].

Preisfestlegung

Die Festlegung der Preise für die einzelnen Buchungsklassen kann unter verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen, z. B. können die Preise aus dem Wettbewerb und dem Verhalten der Konkurrenten bestimmt werden. Allerdings ist die Sitzplatzverwaltung eng an die Preisfestlegung gekoppelt. Es ist damit möglich die Preise als variabel zu betrachten und den Preis für eine Buchungsklasse, für die keine Anfragen mehr zugelassen werden sollen (aber praktisch noch Kapazität vorhanden wäre), einfach zu erhöhen, bis es wieder rentabel ist Buchungen anzunehmen.

Revenue Management ist eine sinnvolle Kombination von Methoden aus den vier erwähnten Bereichen. Dabei müssen in regelmäßigen Abständen die Kapazitäten angepasst, neue Prognosen über das Eintreffen und die Verteilung der Nachfragemengen getroffen und das Entscheidungsverhalten über die Annahme oder Ablehnung von Buchungsanfragen variiert werden, da die Leistung oder die Güte des Revenue Managements stark davon abhängt, wie häufig und wie genau diese Updates sind.

2.2.3 Revenue Management im Bahnverkehr

Da das Revenue Management im Flugverkehr weit verbreitet und recht erfolgreich ist, gibt es Ansätze, es auch im Bahnverkehr einzuführen. Wie beim Flugverkehr gibt es im Schienenfernverkehr einen der Fahrt vorgelagerten Buchungsprozess, auf den sich die Modelle zur (kontrollierten) Überbuchung und zur Sitzplatzverwaltung beziehen. Es gibt mehrere Arbeiten, die sich mit Revenue Management Methoden im Bahnfernverkehr beschäftigen. Ciancimino et al. [6] haben ein mathematisches Modell für eine optimale Belegung der Sitzplätze im Zugverkehr vorgestellt.

Ein praktisches Beispiel ist das im Dezember 2002 neu eingeführte Preissystem der Deutschen Bahn (genannt PEP - Preis- und Erlösmanagement), das wie im Flugverkehr aus mehreren Buchungsklassen besteht. Erstmals gab es Frühbucherrabatte, wenn man sich auf einen Zug festlegt und zwischen Hin- und Rückfahrt eine Nacht von Samstag auf Sonntag liegt. Eine Stornierung war nur durch hohe Gebühren möglich. Wie beim Luftverkehr sollte die Nachfrage über den Preis gesteuert werden und damit eine Verlagerung von überfüllten Zügen zu vergleichsweise leeren Zügen stattfinden. Nach zahlreichen Protesten und einem Nachfragerückgang wurden einige Neuerungen (z. B. die hohen Gebühren bei Stornierungen) zurückgenommen

und die BahnCard wieder eingeführt [26]. (Eine ausführliche Beschreibung des Tarifsystems der Deutschen Bahn findet sich auf der Internetseite [36].)

Dies zeigt, dass, auch wenn es im Flugverkehr gut funktionierende Revenue Management Systeme gibt, eine Übertragung eines ähnlich komplexen Preissystems auf den Zugverkehr eine Gratwanderung ist. Ein komplexes Preissystem kann für einen Passagier schnell unüberschaubar und kompliziert werden, auch wenn es mehr Möglichkeiten gibt günstiger zu reisen. Da der Schienenverkehr eine starke Konkurrenz im privaten Autoverkehr hat, ist die Gefahr groß, dass viele Passagiere auf ein Auto umsteigen.

2.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden Konzepte zur Preisgestaltung aus verschiedenen Bereichen des öffentlichen Verkehrs vorgestellt.

Wir haben gesehen, dass der Nahverkehr in Deutschland weitestgehend einen Zonentarif favorisiert. Dieses Preissystem ist relativ leicht verständlich und ohne großen Aufwand durchsetzbar. Die Preisgestaltung im Luftverkehr besteht dagegen aus einem komplexen dynamischen Optimierungsprozess.

Ein Revenue Management für den Nahverkehr in dem Ausmaß wie es im Flugverkehr praktiziert wird, ist aus zwei wichtigen Gründen nicht vertretbar. Erstens gibt es im Nahverkehr keinen dem Reiseantritt vorgelagerten Buchungsprozess, da der öffentliche Nahverkehr eher ein alltägliches, spontanes Verkehrsmittel ist. Eine Anwendung von Methoden zur Überbuchung und Sitzplatzverwaltung ist daher nicht denkbar. Für den zweiten Grund betrachten wir die Ziele für ein Tarifsystem, die im Nahverkehrsplan von Berlin [35] als „grundlegend“ bewertet sind:

1. Kundenbindung und Erhöhung der Zahl der Stammkunden.
2. Gewinnung von Neukunden u.a. durch flexible Tarifangebote und Kooperation mit anderen Dienstleistern.
3. Einführung von zielgruppenorientierten Tarifen und Tarife für sozial Schwache.
4. Vereinfachung der Handhabung des Erwerbs von Fahrausweisen sowie der Tarifbestimmung.
5. Tarifgerechtigkeit und Übersichtlichkeit des Tarifsystems.

Häufig wechselnde Preise sind vor allen Dingen nicht mit den Zielen 4 und 5 vereinbar.

Dennoch ist die Einteilung der Fahrgäste nach ihrer Zahlungsbereitschaft auch im Nahverkehr möglich und könnte zur Verfolgung der Ziele verwendet werden. Eine Voraussetzung dafür ist ein technisches Instrument zur komplexeren Fahrpreisberechnung: Die Einführung eines elektronischen Tickets

ermöglicht auch im Nahverkehr neue Dimensionen zur Preisgestaltung und wird im Folgenden kurz diskutiert.

Ein Forschungsprojekt des Verbands deutscher Verkehrsunternehmen (VDV) gemeinsam mit dem Zentralen Kreditausschuss (ZKA) beschäftigt sich mit einem Elektronischen Fahrgeld Managementsystem (EFM), siehe dazu z. B. auf die Internetseite des VDV [28]. Dieses System wird in drei Stufen unterschieden:

1. Stufe: Einsatz von Chipkarten zum bargeldlosen Bezahlen.
2. Stufe: Abbildungen von Fahrscheinen auf dem Chip.
3. Stufe: Automatische Ermittlung des Fahrpreises auf der Basis von An- und Abmeldevorgängen bei Nutzung.

Die 3. Stufe könnte z. B. wie ein Telefonvertrag umgesetzt werden, d. h. der Passagier weiß wie teuer die einzelnen Leistungen sind und bekommt am Ende des Monats eine Abrechnung über alle von ihm genutzten Leistungen.

Mit einem elektronischen Fahrgeld Managementsystem können die obigen Ziele für ein Tarifsystem leichter umgesetzt werden. Durch ein EFM der 3. Stufe wäre es z. B. möglich, zu Berufsverkehrszeiten und auf Geschäftstrecken erhöhte Preise zu nehmen und damit zu versuchen, eine Nachfrageverlagerung auf Schwachlastzeiten und auf weniger frequentierte Strecken zu erreichen. Oder es wäre möglich kundenspezifische Fahrpreissysteme anzubieten, z. B. günstige Fahrpreise am Wochenende und zu den Abendstunden für Freizeitfahrer. Eine etwas ausführlichere Diskussion findet sich in der Zeitschrift „Der Nahverkehr“, siehe z. B. [9].

Diese Möglichkeiten legen es nahe, ein allgemeines Modell zu entwickeln, das die Einnahmen maximiert und auf verschiedene Preissysteme angewendet werden kann. Daher werden im nächsten Kapitel die wirtschaftswissenschaftlichen Grundlagen dafür geschaffen. Im Kapitel 4 wird das allgemeine Modell, das Fahrpreisplanungsmodell, dann vorgestellt.

Außerdem werden wir bei den Berechnungen (Kapitel 7) die hier vorgestellten Zonenpreissysteme aus Abschnitt 2.1 und das Entfernungssystem aus Abschnitt 2.2.1 verwenden, da wir mit Daten für Potsdam und für die Niederlande rechnen werden.

Kapitel 3

Markt- und Preistheorie

In dieser Arbeit wird der ÖPNV als Markt betrachtet, in dem das Nahverkehrsunternehmen der Anbieter und die Verkehrsteilnehmer die Nachfrager sind. Daher werden hier Prinzipien der Markt- und Preistheorie aus der Volkswirtschaftslehre vorgestellt. Es ist nur ein kleiner Exkurs und soll als Grundlage für ein besseres Verständnis und Diskussion unserer mathematischen Modelle dienen. Für eine detailliertere Einführung in die Volkswirtschaftslehre bzw. in die Markt- und Preistheorie siehe z. B. Cezanne [5], Wied-Nebbeling [30], Nordhaus und Samuelson [20] und Siebert [22].

Zuerst werden die Grundzüge eines Marktes beschrieben und die Begriffe Nachfragefunktion und Preiselastizität definiert. Dann wird erläutert, wie ein Unternehmen seinen Gewinn maximiert. Es wird im Besonderen der Fall betrachtet, dass es sich bei dem Unternehmen um ein Monopol handelt, da die Verkehrsbetriebe, um die es im Späteren gehen soll, auch eine Art Monopolstellung haben.

3.1 Markt

Im Folgenden werden die Grundzüge eines Marktes beschrieben. Dazu seien folgende Mengen definiert:

$$\begin{aligned} G &:= \{g_1, \dots, g_m\} && \text{Güter (oder Dienstleistungen)} \\ U &:= \{u_1, \dots, u_n\} && \text{Unternehmen} \\ H &:= \{h_1, \dots, h_l\} && \text{Haushalte} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Unternehmen stellen Güter zu Konsum- und Investitionszwecken her. Sie sind die Anbieter auf dem Markt.

Haushalte entscheiden darüber, welche Güter in welchen Mengen sie nachfragen. Sie sind die Nachfrager auf dem Markt.

Jedes Gut $g \in G$ hat abhängig von seiner Anzahl $x_g \in \mathbb{R}_+$ und in Verbindung mit anderen Gütern einen gewissen Nutzen für einen Haushalt $h \in H$.

Dass der Nutzen eines Gutes auch von dem Besitz eines anderen Gutes abhängt, veranschaulicht folgendes Beispiel: Der Nutzen eines Videorecorders ist sicherlich höher, wenn man auch einen Fernseher besitzt.

Sei für jeden Haushalt $h \in H$ V_h die Funktion, die jedem Mengenvektor $\mathbf{x} := (x_{g_1}, \dots, x_{g_m})$ von Gütern einen reellwertigen Nutzen zuordnet.

$$V_h : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{x} \longmapsto V_h(\mathbf{x}) \quad h \in H$$

Außerdem hat jedes Gut $g \in G$ einen Preis $p_g \in \mathbb{R}_+$.

Für die zwei folgenden Annahmen verwenden wir das Menschbild des *homo oeconomicus*. Nordhaus und Samuelson [20] definieren den *homo oeconomicus* wie folgt:

Definition 3.1. *Der homo oeconomicus ist ein Idealtyp eines Menschen, der sich ausschließlich rational verhält und dessen Motive ausschließlich ökonomischer Natur sind. Dieser Auffassung zur Folge haben die Konsumenten gegebene Präferenzen und streben nach der bestmöglichen Befriedigung ihrer Wünsche, während die Unternehmer allein an der Gewinnmaximierung interessiert sind.*

Wir nehmen nun folgendes an:

- Ein Haushalt $h \in H$ strebt bei gegebenem Einkommen $S_h \in \mathbb{R}_+$ eine Nutzenmaximierung an

$$\begin{aligned} \max \quad & V_h(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{g \in G} p_g \cdot x_g \leq S_h. \end{aligned}$$

- Ein Unternehmen u strebt bei gegebenen Kosten eine Gewinnmaximierung an. Auf diesen Punkt wird später eingegangen.

Auf einem Markt treffen Anbieter und Nachfrager aufeinander. Über den Preis wird bestimmt, welche Nachfrage und welches Angebot erreicht wird.

3.2 Nachfragefunktion

Die Nachfrage eines Konsumenten nach einem Gut g hängt von verschiedenen Einflussfaktoren ab, z. B. (Siebert [22]):

- vom Preis des Gutes g ,
- vom Einkommen des Konsumenten,
- von den Preisen anderer Güter (vor allen Dingen substitutive Güter: Güter, die g ersetzen können und komplementäre Güter: Güter, die mit g kombiniert werden können),

- von der Bedürfnisstruktur des Konsumenten.

Uns interessiert im Folgenden nur die Abhängigkeit der Nachfrage vom Preis des Gutes g . Um diese Abhängigkeit untersuchen zu können, werden alle anderen Einflussgrößen als konstant betrachtet (ceteris paribus Regel).

Definition 3.2. *Es besteht zu jedem gegebenen Zeitpunkt eine feste Beziehung zwischen dem Marktpreis für ein Gut und der von diesem Gut nachgefragten Menge.*

Diese Beziehung zwischen Preis und gekaufter Menge wird als Nachfragefunktion oder Nachfragekurve bezeichnet (Nordhaus und Samuelson [20]).

Wir werden ein bestimmtes Gut und die Nachfrage *aller* Haushalte betrachten.

Sie kann mathematisch als Funktion $x_g(p)$ ausgedrückt werden, die jedem Preis p eines Gutes g eine Nachfrage x zuordnet. Da im Weiteren aber immer klar sein wird, welches Gut gerade betrachtet wird, soll auf die Indizierung verzichtet werden.

$$x : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad p \longmapsto x(p).$$

Es ist nur die Beziehung zwischen nichtnegativem Preis und nichtnegativer Nachfrage von Interesse. Zur Vereinfachung nehmen wir hier für die Funktion an, dass die Preise und die Nachfrage kontinuierliche Werte annehmen. Für eine Auswertung müssen diese Werte dann sinnvoll gerundet werden.

Mit der Grundannahme, dass der Nachfrager seinen Nutzen maximieren will und sich daher rational verhält (Definition 3.1), folgt: Mit fallendem Preis nimmt die nachgefragte Menge zu bzw. mit steigendem Preis nimmt die nachgefragte Menge ab. Die Nachfragekurve ist monoton fallend. (Nordhaus und Samuelson [20] bezeichnen dies als Gesetz der abnehmenden Nachfrage.)

3.3 Preiselastizität

Die Beziehung zwischen nachgefragter Menge eines Gutes und seinem Preis ist oft nicht genau bekannt. Man kennt meist nicht den Verlauf der Nachfragekurve, sondern nur einen Punkt, z. B. den augenblicklichen Preis eines Gutes und die dazu abgesetzte Menge. Um in dieser Situation trotzdem Aussagen über die Änderung der Nachfrage bei Variation des Preises treffen zu können, gibt es den Begriff der Preiselastizität, vergleiche hier auch mit Cerwenka [4].

Definition 3.3. *Sei $x(p)$ eine Nachfragefunktion.*

Die Preiselastizität der Nachfrage ϵ an der Stelle p_0 ist definiert als

$$\epsilon := \left. \frac{d}{dp} x(p) \right|_{p=p_0} \cdot \frac{p_0}{x(p_0)}. \quad (3.2)$$

Da die Nachfragefunktion monoton fallend und nichtnegativ ist, gilt für die Preiselastizität der Nachfrage $\epsilon \leq 0$. Für die meisten anderen Einflussgrößen der Nachfrage gibt es einen analogen Elastizitätsbegriff.

Man kann ϵ durch eine Differenzenbetrachtung annähern. Dabei ist x_0 die abgesetzte Menge zu einem gegebenen Preis p_0

$$\epsilon \approx \frac{\Delta x}{\Delta p} \cdot \frac{p_0}{x_0} = \frac{\frac{\Delta x}{x_0}}{\frac{\Delta p}{p_0}}. \quad (3.3)$$

Anschaulich betrachtet, ist die Preiselastizität das Verhältnis von einer prozentualen Änderung der nachgefragten Menge (bezogen auf die Ausgangsmenge x_0) zu einer prozentualen Preisänderung (bezogen auf den Ausgangspreis p_0). Ist ϵ bekannt, kann man Aussagen treffen, um wie viel Prozent sich die nachgefragte Menge ändert, wenn sich der Preis um ein Prozent ändert. Je kleiner ϵ , desto größer ist eine Nachfrageänderung gegenüber einer ein-prozentigen Preisänderung.

Da es sich um eine Näherung handelt, sind die Aussagen nur lokal um den gegebenen Punkt (p_0, x_0) sinnvoll.

3.3.1 Cobb-Douglas Funktion

Aus dem Elastizitätsbegriff lässt sich eine Funktion $x(p)$ herleiten, die an jeder Stelle die gleiche Elastizität besitzt.

Man kann (3.2) schreiben als

$$\epsilon = p \cdot \frac{x'(p)}{x(p)} \quad \Leftrightarrow \quad x'(p) = \frac{x(p)}{p} \cdot \epsilon. \quad (3.4)$$

Für konstantes ϵ können nun diejenigen Funktionen $x(p)$ bestimmt werden, die die Bedingung (3.4) erfüllen.

Man kann sich leicht überlegen, dass diese Funktionen wie folgt aussehen

$$x(p) = c \cdot p^\epsilon, \quad (3.5)$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Diese Funktionen werden auch als Cobb-Douglas-Funktionen bezeichnet.

Bezogen auf einen aktuellen Punkt (p_0, x_0) ergibt sich

$$x(p) = x_0 \cdot \left(\frac{p}{p_0}\right)^\epsilon. \quad (3.6)$$

In Abbildung 3.1 sind einige Cobb-Douglas Funktionen für verschiedene Werte von ϵ durch den Punkt $(4;10)$ dargestellt.

Die Cobb-Douglas Funktion ist für alle $\epsilon < 0$ in $p = 0$ nicht definiert. Sie strebt mit $p \rightarrow 0$ polynomial vom Grad ϵ gegen Unendlich und mit $p \rightarrow \infty$ polynomial vom Grad ϵ gegen Null. Aus diesen Gründen und zumal sie, wie die Preiselastizität, nur lokal um einen gegebenen Punkt für die

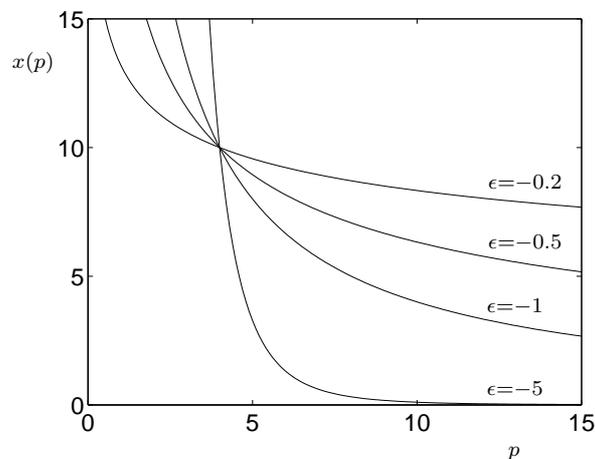


Abbildung 3.1: Cobb-Douglas Funktionen für verschiedene Werte von ϵ durch den Punkt $(x_0; y_0) = (4; 10)$.

Nachfrage erklärbar sind, werden die Funktionen von Typ Cobb-Douglas in dieser Arbeit nicht als Modell für eine Nachfragefunktion verwendet. Für einen sehr kleinen Preis auch für $p = 0$ gibt es eine (begrenzte) Nachfrage. Und man kann annehmen, dass für einen sehr hohen Preis die Nachfrage 0 oder wenigstens vernachlässigbar ist. Diese Aspekte können mit diesem Funktionstyp nicht umgesetzt werden.

3.4 Gewinnmaximierung eines Monopolisten

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Monopol, d. h. wir betrachten einen Markt auf dem es nur einen Anbieter gibt. Wir untersuchen die Gewinnmaximierung eines Monopolisten für ein Gut. Dabei wird die Menge und der Preis für ein Gut gesucht, so dass beim Verkauf des Gutes am meisten Gewinn erzielt wird.

Der Gewinn eines Unternehmens entspricht der Differenz von Erlös und Kosten.

Es werden zur Vereinfachung folgende Annahmen getroffen:

1. Die Kosten nehmen mit zunehmender Produktion zu.
2. Alle betrachteten Funktionen sind reellwertig und stetig differenzierbar.

Es gibt nun zwei Betrachtungsweisen. Als erstes wird in Abschnitt 3.4.1 die allgemeine volkswirtschaftliche Betrachtungsweise vorgestellt, bei der davon ausgegangen wird, dass der Preis von der nachgefragten Menge abhängt. In der meisten volkswirtschaftlichen Literatur findet diese Sicht Anwendung.

Im Weiteren werden wir aber davon ausgehen, dass die nachgefragte Menge vom Preis abhängt und werden daher im Abschnitt 3.4.2 zeigen, dass diese Sicht zu den gleichen Ergebnissen führt.

3.4.1 (Allgemeine) volkswirtschaftliche Betrachtungsweise

Der Preis p eines Gutes hängt von der nachgefragten Menge x des Gutes ab. Es gibt eine Preisabsatzfunktion $p(x)$, die jeder Menge x einen (Stück)Preis zuordnet. In diesem Fall hängen Preis, Erlös und Kosten von der nachgefragten Menge x ab. Die Funktionen seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{llll} p : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ & x \longmapsto p(x) & \text{Preisabsatzfunktion} \\ G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} & x \longmapsto G(x) & \text{Gewinnfunktion} \\ E : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ & x \longmapsto E(x) & \text{Erlösfunktion} \\ K : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ & x \longmapsto K(x) & \text{Kostenfunktion} \end{array}$$

Für die folgende Analyse vergleiche auch mit Wied-Nebbeling [30].

Es gilt zu lösen

$$\max G(x) = \max E(x) - K(x).$$

Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Maximums mit $x \in (0, \infty)$ ist

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}E(x) - \frac{d}{dx}K(x) = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{oder äquivalent dazu } \frac{d}{dx}E(x) = \frac{d}{dx}K(x).$$

Die Ableitung des Erlöses $\frac{d}{dx}E(x)$ ist der *Grenzerlös*, d. h. die Erlösänderung bei einer Mengenänderung, $\frac{d}{dx}K(x)$ sind die *Grenzkosten*, d. h. die Kostenänderung bei einer Mengenänderung. Anschaulich heißt Gleichung (3.7), dass der Grenzgewinn ($\frac{d}{dx}G(x)$), d. h. der Gewinn für eine weitere Produktion des Gutes, null ist. Ist der Grenzgewinn größer null, so kann mit einer Erhöhung der Produktion des Gutes mehr Gewinn erzielt werden. Ist der Grenzgewinn kleiner null, so führt jede weitere Erhöhung der Produktion zu einem kleineren Gewinn.

Der Erlös ist das Produkt aus verkaufter Menge und Preis pro Stück. Damit gilt für den Grenzerlös

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}E(x) &= \frac{d}{dx}(x \cdot p(x)) = x \cdot \frac{d}{dx}p(x) + p(x) = \frac{1}{\epsilon} \cdot p(x) + p(x) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}E(x) &= (1 + \frac{1}{\epsilon})p(x) \quad (\epsilon \neq 0), \end{aligned} \quad (3.8)$$

wobei ϵ die Preiselastizität ist.

Die letzte Gleichung in (3.8) ist die AMOROSO-ROBINSON-Relation. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen Grenzerlös und Preis in Abhängigkeit von der Preiselastizität.

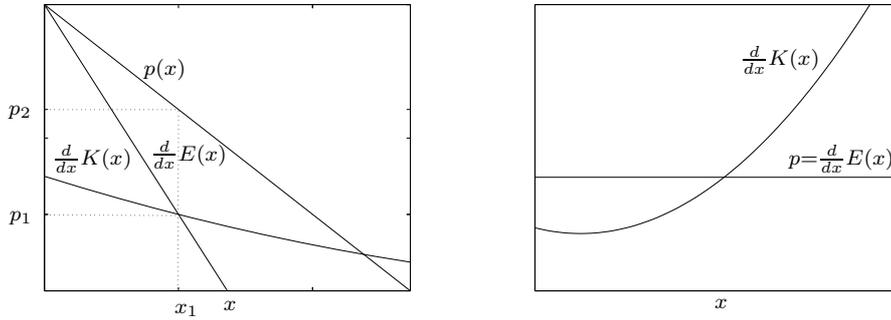


Abbildung 3.2: Links. Optimale Produktionsbestimmung eines Monopolisten. Rechts: Optimale Produktionsbestimmung eines Unternehmens in vollständiger Konkurrenz.

Mit der notwendigen Bedingung (3.7) gilt für den optimalen Preis:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}K(x) &= \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right)p(x) \\ \Leftrightarrow p &= \frac{\frac{d}{dx}K(x)}{1 + \frac{1}{\epsilon}} \quad \text{für } \epsilon \neq -1, 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Die Kostenfunktion ist monoton steigend (Annahme 1). Daher sind die Grenzkosten nichtnegativ. Grenzerlös und Grenzkosten schneiden sich in einem Punkt, in dem die Preiselastizität kleiner -1 ist. In diesem Fall liegt der optimale Preis stets über den Grenzkosten.

Ist die Preiselastizität in jedem Punkt größer als -1 (und kleiner als 0), dann ist der Grenzerlös negativ (vergleiche Gleichung (3.8)). Die notwendige Bedingung für die Existenz eines Gewinnmaximums kann für keinen Punkt erfüllt werden.

Betrachte nun Abbildung 3.2 links. Der Schnittpunkt von Grenzerlös und Grenzkosten entspricht der optimal zu produzierende Menge x_1 zu den Grenzkosten von p_1 . Der optimale Preis für Menge x_1 ist nach der Preisabsatzfunktion der Preis p_2 .

Der Monopolist hat also aufgrund seiner Marktmacht die Möglichkeit, einen Preis über den Grenzkosten durchzusetzen. Der relative Abstand zwischen Preis und Grenzkosten kann als Indikator für die Marktmacht des Monopolisten verwendet werden:

$$\mu := \frac{p - \frac{d}{dx}K(x)}{p}. \quad (3.10)$$

Der Wert μ heißt LERNERScher Monopolgrad. Mit den obigen Betrachtungen über den Preis gilt $\mu \in [0, 1]$. Wenn die Grenzkosten 0 sind oder der Preis unendlich groß ist, ist $\mu = 1$. Ist $p = \frac{d}{dx}K(x)$, dann ist $\mu = 0$.

Zum Vergleich illustriert Abbildung 3.2 rechts den Fall der vollständigen Konkurrenz. In diesem Fall kann ein einzelnes Unternehmen den Preis nicht

selbst bestimmen. Durch die Konkurrenz mehrerer Unternehmen wird der Preis durch den Markt bestimmt. Es gilt dann $\frac{d}{dx}E(x) = \frac{d}{dx}(p \cdot x) = p$. Dies ist der Grenzfall in der AMOROSO-ROBINSON-Relation (3.8) für $\epsilon \rightarrow \infty$. Das Unternehmen kann nur noch die optimal zu produzierende Menge bestimmen. Aber auch hier gilt, $\frac{d}{dx}E(x) - \frac{d}{dx}K(x) = 0$ ist ein notwendiges Kriterium für einen maximalen Gewinn. Im Fall der vollständigen Konkurrenz gilt daher $\frac{d}{dx}E(x) = p = \frac{d}{dx}K(x)$ und damit $\mu = 0$.

Wegen der notwendigen Bedingung, (3.7) kann (3.8) in die LERNERScher Monopolgrad Definition (3.10) eingesetzt werden:

$$\mu = \frac{p - (1 + \frac{1}{\epsilon})p}{p} = -\frac{1}{\epsilon}$$

Der Monopolgrad ist gleich dem negativen Kehrwert der Preiselastizität. Je preiselastischer die Nachfrage (je größer $|\epsilon|$), desto geringer ist die Macht des Monopolisten.

3.4.2 2. Betrachtungsweise

In dieser Betrachtungsweise soll die Veränderliche der Preis sein und nicht die nachgefragte Menge. Es gibt damit eine Nachfragefunktion $x(p)$. Dann hängen Gewinn, Erlös und Kosten von dem Preis p ab, d. h. analog zur ersten Betrachtung werden die Funktionen nun abhängig von p definiert:

$$\begin{aligned} p &\mapsto G(p) \\ p &\mapsto E(p) \\ p &\mapsto K(x(p)). \end{aligned}$$

Da die Kosten nicht direkt von dem Preis abhängen, wird $K(x(p))$ betrachtet. Es gilt nun zu lösen

$$\max G(p) = \max E(p) - K(x(p)) \quad (3.11)$$

Eine notwendige Bedingung dafür mit $p \in (0, \infty)$ ist

$$\frac{d}{dp}G(p) = \frac{d}{dp}E(p) - \frac{d}{dp}K(x(p)) = 0, \quad (3.12)$$

$$\text{äquivalent dazu ist } \frac{d}{dp}E(p) = \frac{d}{dp}K(x(p)).$$

Es wird der Preis gesucht, bei dem die Erlösänderung bzgl. Preisänderung gleich der Kostenänderung bzgl. Preisänderung ist.

Für die Erlösänderung bzgl. Preisänderung gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}E(p) &= \frac{d}{dp}(p \cdot x(p)) = p \cdot \frac{d}{dp}x(p) + x(p) = \epsilon \cdot x(p) + x(p) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dp}E(p) &= (\epsilon + 1)x(p), \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei ϵ die Preiselastizität ist.

Für die Kostenänderung bzgl. Preisänderung gilt:

$$\frac{d}{dp}K(x(p)) = \frac{d}{dx}K(x(p)) \cdot \frac{d}{dp}x(p)$$

Mit Bedingung (3.12) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} (\epsilon + 1)x(p) &= \frac{d}{dx}K(x(p)) \cdot \frac{d}{dp}x(p) \\ \Leftrightarrow (\epsilon + 1)x(p) &= \frac{d}{dx}K(x(p)) \cdot \epsilon \cdot \frac{x(p)}{p} \\ \Leftrightarrow p &= \frac{\frac{d}{dx}K(x(p)) \cdot \epsilon}{\epsilon + 1} = \frac{\frac{d}{dx}K(x(p))}{1 + \frac{1}{\epsilon}} \quad \text{für } \epsilon \neq -1, 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

und damit wieder die gleiche Bedingung an den Preis wie in der ersten Betrachtungsweise, Gleichung (3.9).

3.5 Anwendung im ÖPNV

In diesem Abschnitt werden drei Arbeiten vorgestellt, die sich aus volkswirtschaftlicher Sicht mit einer optimalen Preisfestlegung im ÖPNV beschäftigen und nach meinen Einschätzungen repräsentativ für eine Vielzahl von Artikeln sind, die sich mit diesem Thema befassen. Wir beschränken uns auf die grundlegenden Konzepte der Arbeiten.

Außerdem gehen wir auf die Preiselastizität im ÖPNV ein, da diese ein beliebtes Thema in vielen Veröffentlichungen ist.

3.5.1 Optimale Preisbestimmung

Das Hauptziel der optimalen Preisfestlegung im ÖPNV ist häufig keine Gewinnmaximierung, sondern eine Wohlfahrtsmaximierung, d. h. neben unternehmerischen Kosten werden soziale Kosten betrachtet. Soziale Kosten werden durch alle Verkehrsteilnehmer verursacht, sowohl von Passagieren der öffentlichen Verkehrsunternehmen als auch von Reisenden mit dem eigenen Pkw. Sie beinhalten z. B. Umweltbelastungen bzw. -verschmutzungen aber auch Fahr- und Wartezeiten der Passagiere. Mit einer Wohlfahrtsmaximierung soll idealerweise erreicht werden, dass jeder Verkehrsteilnehmer die Kosten bezahlt, die er verursacht hat, vergleiche Storchmann [23].

Pedersen

Pederson [21] diskutiert an einem theoretischen Modell eine optimale Preisgestaltung. Er betrachtet dazu drei Variablen:

- x - Anzahl der Passagiere,

- y - eingesetzte Kapazität und
- z - Gesamtkapazität (insgesamt verfügbar).

Mit diesen Variablen soll kurzfristig (nur x ist variabel), mittelfristig (x und y sind variabel) und langfristig (x , y und z sind variabel) der optimale Preis bestimmt werden. Dabei wird folgende Funktion maximiert

$$\max \quad W(x, y) - K(x, y, z)$$

unter der Nebenbedingung, dass alle Kapazitätsschranken eingehalten werden. Hierbei entspricht $W(x, y)$ der Zahlungsbereitschaft der Passagiere. Diese Funktion enthält neben dem Fahrpreis auch alle Zeitkosten, die von der Anzahl der Passagiere und der eingesetzten Kapazität abhängt. $K(x, y, z)$ sind die entsprechenden operationalen Kosten. Pedersen macht nur Aussagen, welches Verhalten (Monotonie und Krümmungsverhalten) die Funktionen haben.

Dann betrachtet er verschiedene Situationen, die auftreten können. Insgesamt diskutiert er nur qualitativ, wie der optimale Preis in jeder dieser Situationen zu wählen ist. Er macht keine Aussagen darüber, wie man die einzelnen Funktionen explizit bestimmt und über die drei Variablen ein (globales) Maximum berechnet.

De Borger, Mayeres, Proost und Wouters

De Borger, Mayeres, Proost und Wouters [8] führen Berechnungen für belgische Großstädte durch. Sie berechnen den optimalen Preis (pro zurückgelegten Kilometer) für Auto und öffentlichen Nahverkehr für verschiedene Situationen

- Preisunterschiede für Haupt- und Nebenverkehrszeit,
- gleiche Preise in Haupt- und Nebenverkehrszeit,
- Budgetrestriktion für den öffentlichen Nahverkehr.

Ihre zu maximierende Funktion ist die Summe aus einer Wohlfahrtsfunktion und dem Gewinn. Als Nachfragefunktion benutzen sie eine loglineare Funktion, die Preise und Geschwindigkeiten gewichtet durch feste Elastizitäten enthält.

In der Wohlfahrtsfunktion sind soziale Kosten von Verschmutzung, Lärm, Unfallgefahr und Zeitverlust durch Staus enthalten. Sie geben leider keine explizite Formel für die Wohlfahrtsfunktion. Für ihre Berechnungen verwenden sie bestimmte Werte, die speziell für Belgien ermittelt wurden.

Kocur und Hendrickson

Kocur und Hendrickson [16] berechnen optimale Preise für den Busverkehr. Sie verwenden eine lineare Nachfragefunktion, die für den Busverkehr Wartezeit, Gehzeit (von und zur Haltestelle), Fahrzeit und Preis enthält sowie Autokosten und Fahrzeit mit dem Auto.

Das betrachtete Verkehrsgebiet unterteilen sie durch ein rechteckiges Gitter. Durch diese Approximation bestimmen sie die für die Nachfragefunktion nötigen Parameter.

Sie maximieren eine gewichtete Summe aus Einnahmen und Nutzen der Passagiere.

3.5.2 Preiselastizität im ÖPNV

In der Verkehrsliteratur wird oft als „Daumenregel“ ein Preiselastizitätsfaktor von -0.3 angegeben, d. h. eine 10%ige Preiserhöhung führt zu einem 3%igen Nachfragerückgang (betrachte dazu Gleichung 3.3). In diesem Zusammenhang werden meistens Simpson und Curtin zitiert, die in den 60er und frühen 70er Jahren in einigen Städten der USA die Beziehung zwischen Fahrpreis und öffentlichem Verkehrsaufkommen untersucht haben. Ihre Ergebnisse sind in einem Artikel von Curtin [7] zusammengefasst. Gutknecht [13] und Litman [17] führen Studien an, die ebenfalls Preiselastizitätswerte im Verkehr bestimmen. Insgesamt liegen die Werte im Nahverkehr zwischen -0.1 und -0.6. In beiden Artikeln werden Beispiele angeführt, die zeigen, dass der Wert unter anderem mit der Tageszeit und der Reiselänge variiert.

Neben der Preiselastizität gibt es den Begriff der Kreuz-Preiselastizität für zwei untereinander im direkten Wettbewerb stehende Produkte, z. B. zwei verschiedene Ticketarten. Anschaulich gibt die Kreuz-Preiselastizität an, um wieviel Prozent sich die Nachfrage nach dem Ticket i ändert, wenn sich der Preis von Ticket j um ein Prozent ändert.

In der Regel werden Preiselastizitäten und Kreuz-Preiselastizitäten verwendet, um qualitative Aussagen zu treffen, inwieweit eine Änderung des Fahrpreises oder der Kraftstoffpreise das Verkehrsaufkommen des öffentlichen Verkehrs sowie des Individualverkehrs mit dem privaten Pkw beeinflusst.

In dem Modell von De Borger, Mayeres, Proost und Wouters [8] zur Berechnung optimaler Preise im öffentlichen Nahverkehr wurden feste Elastizitätswerte zur Gewichtung der Nachfragefunktion verwendet. Hierbei wurden neben Preiselastizitäten auch Elastizitäten bzgl. anderer die Nachfrage beeinflussenden Größen wie z. B. Fahrzeit integriert.

Wir werden die Preiselastizität dazu verwenden, elementare Funktionen, die als Modell einer Nachfragefunktion dienen sollen, zu skalieren. Die Verwendung von elementaren Funktionen als Nachfragefunktionen wird in Ka-

pitel 5 diskutiert. Die Skalierung der Funktionen durch eine Preiselastizität von -0.3 erfolgt bei den Berechnungen in Kapitel 7.

Kapitel 4

Fahrpreisplanungsmodell

Unser Ziel ist es, für ein gegebenes Preissystem eines öffentlichen Nahverkehrsbetriebes die Preise zu bestimmen, die die erwarteten Einnahmen maximieren.

In diesem Kapitel werden wir ein Modell, das Fahrpreisplanungsmodell, diskutieren, mit dem wir unser Ziel erreichen wollen. Wir nehmen auf einige wirtschaftliche Grundlagen Bezug, die in Kapitel 3 besprochen wurden. Zum einen verwenden wir eine Nachfragefunktion, die für jeden nichtnegativen Preis eine nichtnegative Nachfrage angibt. Zum anderen besprechen wir das Fahrpreisplanungsmodell hinsichtlich der Gewinnmaximierung eines Monopolisten aus Abschnitt 3.4.

Der Aufbau dieses Kapitels ist wie folgt: Zunächst wird in Abschnitt 4.1 das allgemeine Modell vorgestellt. Wir zeigen die Anwendbarkeit auf einige Preissysteme, die wir in Kapitel 2 vorgestellt haben. In Abschnitt 4.2 diskutieren wir das Modell in wirtschaftlicher und sozialer Hinsicht. Außerdem wird die Existenz einer Nachfragefunktion im öffentlichen Personennahverkehr ausführlich erörtert. In Abschnitt 4.3 fassen wir die Vorzüge des Fahrpreisplanungsmodells zusammen. Dabei gehen wir kurz auf die im Abschnitt 3.5 besprochene Literatur ein.

4.1 Allgemeines Modell

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der ein öffentliches Verkehrsnetz modelliert, wobei die Knotenmenge V die Menge der Stationen repräsentiert und die Kantenmenge E die Menge der direkten Verbindungen zwischen zwei Stationen. Sei $\mathcal{D} \subseteq V \times V$ die Menge aller *OD-Paare* (origin-destination Paare), d. h. die Menge aller Paare von Knoten, für die es mindestens eine Verbindung (die aus mehreren Kanten bestehen kann) mit einem öffentlichen Verkehrsmittel gibt.

Weiterhin betrachten wir eine Menge \mathcal{R}_{st} von *Reisealternativen*, um mit einem öffentlichen Verkehrsmittel von einer Station s zu einer Station t zu

fahren. Eine Reisealternative kann z. B. eine bestimmte Ticketart wie Einzelticket oder Monatsticket sein. Darüberhinaus kann eine Reisealternative auch eine Kombination einer Ticketart mit der Anzahl von Fahrten sein, die in einem bestimmten Zeitraum mit dem Ticket zurückgelegt werden, z. B. 40 Fahrten in einem Monat mit einem Monatsticket. Eine genauere Spezifizierung der einzelnen Reisealternativen erfolgt bei der Betrachtung von Beispielen bzw. von Nachfragemodellen in den Kapiteln 5, 6 und 7.

Sei $f_{st}^i(\mathbf{p})$ die *Fahrpreisfunktion* für Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ und OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$. Sie hängt von mehreren *Preisvariablen* $(p_1, \dots, p_n)^T =: \mathbf{p}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ab:

$$f_{st}^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{p} \longmapsto f_{st}^i(\mathbf{p}).$$

Die Preisvariablen bilden zusammen mit den Fahrpreisfunktionen ein *Preis-system* oder *Tarifsystem*. Betrachtet man z. B. eine Reisealternative, d. h. $|\mathcal{R}_{st}| = 1$ für alle $(s, t) \in \mathcal{D}$, sowie die Preisvariablen p_G, p_k und Fahrpreisfunktionen $f_{st}(p_G, p_k) = p_G + p_k \cdot \ell_{st}$, wobei ℓ_{st} der kleinste Abstand des OD-Paares (s, t) ist, so definieren Preisvariablen und Fahrpreisfunktionen ein Grund-, Entfernungspreissystem.

Für jedes Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ und jede Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ gibt es eine Nachfragefunktion \tilde{x}_{st}^i , die von der Fahrpreisfunktion f_{st}^i sowie den Fahrpreisfunktionen aller mit i konkurrierenden Reisealternativen für das OD-Paar (s, t) abhängt. Ein Azubiticket ist z. B. keine Konkurrenz zu einem Monatsticket im Normaltarif, da es nur von einer bestimmten Personengruppe genutzt werden kann.

Sei r die Anzahl der Reisealternativen (inklusive i), die mit i konkurrieren. Die Nachfragefunktion \tilde{x}_{st}^i gibt für jeden Vektor von Fahrpreisfunktionen $\mathbf{f}_{st}(\mathbf{p}) := (f_{st}^1(\mathbf{p}), \dots, f_{st}^r(\mathbf{p}))^T$ an, wie viele Passagiere mit Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ von s nach t reisen.

$$\tilde{x}_{st}^i : \mathbb{R}_+^r \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{f}_{st}(\mathbf{p}) \longmapsto \tilde{x}_{st}^i(\mathbf{f}_{st}(\mathbf{p})).$$

Als eine Verknüpfung von Funktionen kann man aber auch eine Nachfragefunktion $x_{st}^i(\mathbf{p}) = (\tilde{x}_{st}^i \circ \mathbf{f}_{st})(\mathbf{p})$ abhängig von den Preisvariablen betrachten:

$$x_{st}^i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \mathbf{p} \longmapsto x_{st}^i(\mathbf{p}). \quad (4.1)$$

Zur Vereinfachung wird auch hier wieder angenommen, dass Preisvariablen und Nachfragemengen kontinuierliche Werte annehmen können. Da wir über eine Vielzahl von Verkehrsteilnehmern optimieren werden, können wir die Nachfragemengen und Preise mit vernachlässigbarem Fehler runden.

Dann berechnen sich die Einnahmen $e_{st}^i(\mathbf{p})$ für Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ und OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ durch

$$e_{st}^i(\mathbf{p}) = f_{st}^i(\mathbf{p}) \cdot x_{st}^i(\mathbf{p}).$$

Die Einnahmen $e_{st}(\mathbf{p})$ für ein OD-Paar (s, t) und alle Reisealternativen bzw. die Gesamteinnahmen $e(\mathbf{p})$ über alle OD Paare und alle Reisealternativen

berechnen sich durch

$$\begin{aligned} e_{st}(\mathbf{p}) &= \sum_{i \in \mathcal{R}_{st}} e_{st}^i(\mathbf{p}) = \sum_{i \in \mathcal{R}_{st}} f_{st}^i(\mathbf{p}) \cdot x_{st}^i(\mathbf{p}) \quad \text{bzw.} \\ e(\mathbf{p}) &= \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} e_{st}(\mathbf{p}) = \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \sum_{i \in \mathcal{R}_{st}} f_{st}^i(\mathbf{p}) \cdot x_{st}^i(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Alle Restriktionen an die Preisvariablen fassen wir in der Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ zusammen.

Damit ergibt sich dann für das Modell zur Maximierung der Einnahmen

$$\begin{aligned} \text{(FPP)} \quad \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \sum_{i \in \mathcal{R}_{st}} f_{st}^i(\mathbf{p}) \cdot x_{st}^i(\mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} \in P. \end{aligned}$$

Im Folgenden nennen wir es das *Fahrpreisplanungsproblem* (FPP). Es werden Preise gesucht, die die Einnahmen für ein gegebenes Preissystem maximieren.

Komplexität

Wir zeigen, dass das Fahrpreisplanungsproblem als Spezialfall das Problem der quadratischen Programmierung enthält.

Das Entscheidungsproblem der quadratischen Programmierung ist folgendermaßen definiert:

GEGEBEN: Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c, d \in \mathbb{Q}^n$ und $B \in \mathbb{Q}$.

FRAGE: Gibt es einen Vektor $y \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (c_i \cdot y_i^2 + d_i \cdot y_i) \geq B \\ \text{und} \quad & Ay \leq b? \end{aligned}$$

Dieses Problem ist NP-schwer, siehe Garey und Johnson [11].

Für unser Fahrpreisplanungsproblem betrachten wir n Preisvariablen, n OD-Paare $|\mathcal{D}| = n$ und eine Reisealternative $|\mathcal{R}_{st}| = 1$. Wir verzichten auf die Indizierung nach der Reisealternative. Für die Fahrpreisfunktion des j -ten OD-Paares gelte

$$f_j(p_1, \dots, p_n) = p_j \quad j = \{1, \dots, n\},$$

und für die Nachfragefunktion gelte

$$x_j(p_1, \dots, p_n) = c_j \cdot p_j + d_j \quad j = \{1, \dots, n\}.$$

Dann enthält das Fahrpreisplanungsproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{p}) \cdot x_j(\mathbf{p}) = \sum_{j=1}^n (c_j \cdot p_j^2 + d_j \cdot p_j) \\ \text{s.t.} \quad & Ap \leq b \end{aligned}$$

das Entscheidungsproblem der quadratischen Optimierung.

Mit dieser Reduzierung haben wir gezeigt, dass das Fahrpreisplanungsproblem in seiner allgemeinen Form NP-schwer ist.

4.1.1 Anwendungen

In diesem Abschnitt zeigen wir die Anwendbarkeit unseres Fahrpreisplanungsmodells in Bezug auf die verschiedenen Faktoren zur Preisgestaltung, die in Kapitel 2 vorgestellt wurden.

Jede Fahrpreisfunktion für eine bestimmte Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ beinhaltet eine *räumliche* Preisgestaltung über alle OD-Paare $(s, t) \in \mathcal{D}$. Wir betrachten dazu verschiedene Beispiele. (Hierbei ist $\text{dist}(s, t)$ der Abstand zwischen s und t bzgl. des öffentlichen Verkehrsnetzes.)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f_{st}^i(\mathbf{p}) &\geq f_{uv}^i(\mathbf{p}) && \text{für } \text{dist}(s, t) \geq \text{dist}(u, v) \\
 (1a) \quad f_{st}^i(p_B, p_k) &= p_B + p_k \cdot \text{dist}(s, t), && p_B, p_k \geq 0 \\
 (1b) \quad f_{st}^i(p) &= 2.10 \text{€} && \text{für } \text{dist}(s, t) \leq 5 \text{km} \\
 &= 3.00 \text{€} && \text{für } 5 < \text{dist}(s, t) \leq 10 \text{km} \\
 &= 3.80 \text{€} && \text{für } 10 < \text{dist}(s, t) \\
 (2) \quad f_{st}^i(p) &= z \cdot p && \text{für } z \text{ Anzahl der Zonen, die zwischen} \\
 &&& s \text{ und } t \text{ liegen und } p \text{ Preis für eine} \\
 &&& \text{Zone mit Reisealternative } i \\
 (3) \quad f_{st}^i(p) &= \text{konst.} && \forall (s, t) \in \mathcal{D}
 \end{aligned}$$

Mit den ersten drei Funktionen kann ein Entfernungstarif dargestellt werden. Funktion (2) setzt einen Zonenzähltarif um und Funktion (3) entspricht einem Einheitstarif.

Die Reisealternativen $i \in \mathcal{R}_{st}$ können verschiedene Faktoren der Preisgestaltung beinhalten. Prinzipiell können Differenzierungen nach Personengruppen (Schüler, Berufstätige), Verkehrsmitteln (Bus, S-Bahn), Nutzungshäufigkeiten (Monatsticket, Einzelticket) und Tageszeit in den Reisealternativen berücksichtigt werden. Einige Umsetzungen dazu werden im Kapitel 7 betrachtet.

Als Nebenbedingungen können die Preisvariablen im Definitionsbereich beschränkt werden aber auch die verschiedenen Reisealternativen für ein OD-Paar untereinander gekoppelt werden, z. B. $f_{st}^i(\mathbf{p}) \leq 0.8 \cdot f_{st}^j(\mathbf{p})$, d. h. für $(s, t) \in \mathcal{D}$ muss der Fahrpreis für Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ wenigstens 20% günstiger sein als der Fahrpreis für Reisealternative $j \in \mathcal{R}_{st}$.

Insgesamt ist mit diesem Modell eine sehr komplexe Preisbetrachtung möglich. Allerdings werden, je differenzierter die Preisgestaltung erfolgen soll, differenzierte Daten benötigt, z. B. Nutzungshäufigkeiten und zeitliche

Nutzung für jedes OD-Paar oder Einteilung der Passagiere in Benutzergruppen.

In den Beispielrechnungen (Kapitel 7) werden wir sehen, dass die Umsetzungen, die mit den gegebenen Daten möglich sind, ohne große Probleme berechenbar sind.

4.2 Diskussion des Modells

Im Folgenden werden zwei Aspekte behandelt.

Zuerst beurteilen wir unser Fahrpreisplanungsmodell wirtschaftlich und vergleichen es mit dem Gewinnmaximierungsmodell aus Abschnitt 3.4. Außerdem erfolgt eine Betrachtung aus sozialer Sicht. Danach wird die Existenz und die Bestimmung der Nachfragefunktion im ÖPNV diskutiert.

4.2.1 Wirtschaftliche und soziale Beurteilung

Aus wirtschaftlicher Sicht entspricht die Zielfunktion unseres Fahrpreisplanungsproblems aus Abschnitt 4.1 der Gleichung (3.11) mit konstanten Kosten zur Maximierung der Gewinne eines Monopolisten.

Allerdings wurden bei der Gewinnmaximierung eines Monopolisten nur Preise und Kosten des eigenen Unternehmens betrachtet. Wir werden daher sehen, dass durch die Verwendung von elementaren Funktionen als Nachfragefunktionen, die nur von dem Preis der öffentlichen Verkehrsbetriebe abhängen (Kapitel 5), das Fahrpreisplanungsmodell als Gewinnmaximierungsmodell eines Monopolisten mit konstanten Kosten angesehen werden kann. Bei der Verwendung von Entscheidungsmodellen zur Bestimmung einer Nachfragefunktion in Kapitel 6 können die Preise von Konkurrenten (z. B. Autoverkehr) integriert werden. Bei dieser Modellierung ist der Passagier nicht nur auf den ÖPNV angewiesen, sondern kann zur Konkurrenz wechseln.

Das bedeutet, unser Fahrpreisplanungsmodell maximiert den Gewinn der öffentlichen Verkehrsbetriebe, wenn wir konstante Kosten annehmen. Diese Annahme ist insofern begründet, als für das Modell ein konstantes Linienangebot mit festem Fahrplan angenommen wird. Die Kosten werden weitestgehend von diesem Angebot bestimmt. Eine Änderung des Angebots hat in der Praxis aber nicht nur eine Kostenänderung zur Folge, sondern in der Regel auch eine Nachfrageänderung. Da die Nachfrage nur von den Preisen abhängen soll, muss das Linienangebot und der Fahrplan fest gegeben sein.

Bei praktischen Anwendungen sollte berücksichtigt werden, ob die Lösung des Fahrpreisplanungsproblems zulässig bezüglich der verfügbaren Kapazitäten ist. Wenn die maximalen Einnahmen bei einer drastischen Preissenkung und einer daraus resultierenden starken Nachfragesteigerung erzielt werden, kann der Nachfragezuwachs im Allgemeinen nicht mehr mit dem

gleichen Angebot kompensiert werden. Als Nebenbedingungen müssen in diesem Fall die Kapazitätsschranken in dem Modell integriert werden.

Eine mögliche Weiterentwicklung des Modells ist, das Angebot variabel zu lassen, die Nachfrage abhängig von den Preisen, dem Fahrplan- und Linienangebot zu bestimmen und die Kosten dieses Fahrplan- und Linienangebots zu berechnen. Allerdings ist die Bestimmung der Nachfragemenge bereits bei der Annahme eines festen Linien- und Fahrplanangebots recht komplex, siehe Abschnitt 4.2.2.

Auf der anderen Seite sind die Verkehrsbetriebe kein Unternehmen, dass in erster Linie eine Gewinn- oder Erlösmaximierung verfolgt. Soziale Aspekte spielen dabei eine sehr große Rolle. In der Praxis werden den Preisen meistens Schranken auferlegt, um zu garantieren, dass die Nutzung der öffentlichen Verkehrsmittel für die Mehrzahl der Bevölkerung möglich ist:

$$f_{st}^i(\mathbf{p}) \leq b_{st}^i \quad \text{für alle } i \in \mathcal{R}_{st}, (s, t) \in \mathcal{D}, b_{st}^i \in \mathbb{R}_+.$$

Hinzu kommen politische Vorgaben zu dem Linien- und Fahrplanangebot der Transportunternehmen.

Mit unserem Modell können wir die Einnahmen des Verkehrsunternehmens maximieren, müssen aber die Ergebnisse hinsichtlich Sozialverträglichkeit beurteilen. Insgesamt ist unser Modell bezüglich variabler Kosten und sozialer Gesichtspunkte erweiterbar.

4.2.2 Nachfragefunktion im ÖPNV

Die Nachfrage nach Fahrten mit den öffentlichen Verkehrsmitteln wird durch viele Faktoren beeinflusst, z. B. durch Fahrpreise der öffentlichen Transportmittel, Preise bzw. Kosten anderer Verkehrsalternativen (wie Fahrrad, Auto oder Taxi), Fahrzeiten, Komfort usw.

Nachfragefunktionen finden überall in der Ökonomie Anwendung und sind auch in der Praxis von großer Bedeutung. Das zeigt das Beispiel des Revenue Managements. Ohne eine Annahme über die Nachfrageverteilung gibt es keine Grundlage für die Ablehnungs-, Annahmehentscheidung von Buchungsanfragen.

Die Frage ist nun, wie gut man eine Nachfragefunktion bestimmen kann, die nur von den Preisen der öffentlichen Transportmittel abhängt. (Alle anderen Einflussgrößen können in die Nachfragefunktion integriert werden, sind aber feste Parameter.)

Es ist schwierig, die beschriebene Nachfragefunktion empirisch zu ermitteln. Das Verhalten der Passagiere ändert sich mit einer Änderung des Fahrpreises. Dabei zeigt sich jedoch keine Symmetrie. Auf dieses Problem weist auch Walther [29] hin. Es macht einen Unterschied, ob der Fahrpreis erhöht oder gesenkt wird. Bei einer Erhöhung sind die Nutzer der öffentlichen Verkehrsmittel betroffen. Bei einer Preissenkung sollen Autofahrer und andere Verkehrsteilnehmer zu einem Umstieg auf den öffentlichen Verkehr

ermuntert werden. Wird der Preis nach einer Preiserhöhung wieder auf den ursprünglichen Wert gesenkt, verhalten sich die Passagiere nicht unbedingt wie vor der Preiserhöhung. Hat sich z. B. ein ÖPNV Nutzer bei einer Erhöhung ein Auto gekauft, wird er bei einer Senkung des Fahrpreises nicht sofort wieder Bahnfahrer. Allerdings könnte man annehmen, dass dieser Effekt sich nach einiger Zeit wieder ausgleicht. In dieser Zeit treten unter Umständen andere Faktoren auf, die die Nachfrage beeinflussen (z. B. Fahrplanänderungen, Benzinpreiserhöhung), so dass man nicht mehr genau erklären kann, welchen Einfluss die Fahrpreisänderung hat.

Man kann also die Nachfrageentwicklung bezüglich des Preises im Allgemeinen nur schätzen und nicht empirisch bestimmen. Allerdings ist das Verhalten der Passagiere nicht immer rational. Autofahrer schätzen die Kosten des Autobesitzes und der Autonutzung meist niedriger ein, als sie tatsächlich insgesamt sind, vergleiche die Studien, die Baum [2] auflistet. Baum erwähnt außerdem Studien, bei der einige Individualverkehrnutzer weiterhin mit ihren privaten Fahrzeugen fahren würden, selbst wenn die öffentlichen Verkehrsmittel schnell, modern, komfortabel sind, sie direkt zum Ziel fahren und die Nutzung umsonst ist. Je genauer daher die Passagiere bzgl. ihrer Einkommen, Lebensverhältnisse, Vorlieben und ähnliches unterschieden werden, desto genauer (aber auch umfangreicher) ist die Schätzung einer Nachfragefunktion.

Ein weiterer kritischer Punkt ist der Nullpreis. Es gibt Experimente zur Einführung des Nullpreises in einigen Kleinstädten in Deutschland (z. B. Templin und Lübben) und in Belgien (Hasselt). In Templin und Lübben stieg die Zahl der Beförderungsfälle mit den öffentlichen Verkehrsmitteln um das Sechsfache an (Weber [27]). Nach drei Jahren ist diese Zahl in Templin insgesamt um 1200% gestiegen in Hasselt um 1000%, vergleiche Storchmann [24]. Allerdings hatte die Mehrzahl der Passagiere ihre Wege vorher zu Fuß oder mit dem Fahrrad zurückgelegt. Es ist die Frage, wie viele dieser Passagiere weiterhin mit den öffentlichen Verkehrsmitteln fahren würden (und wie viele Fahrten sie durchführen würden), wenn die Benutzung wieder etwas kosten würde. Der Nullpreis ist durch die einfache Benutzbarkeit der Verkehrsmittel ein nicht abzuschätzender Sonderfall. Da in unserem Fahrpreisplanungsmodell die Einnahmen maximiert werden, ist der Nullpreis in diesem Fall nicht relevant. Eine gesonderte Betrachtung des Nullpreises in der Nachfragefunktion wird deshalb nicht durchgeführt.

Trotz dieser Bedenken gehen wir davon aus, dass Nachfragefunktionen verwendet werden können, um die Realität zu approximieren. Wir nehmen an, dass die meisten Verkehrsteilnehmer als homo oeconomicus (siehe Kapitel 3) angesehen werden können, d. h. sie wollen ihren Nutzen maximieren (sind nicht beeinflussbar) und verfügen über alle relevanten Informationen.

Ben-Akiva und Lerman [3] bestimmen Nachfragemengen für den öffentlichen Verkehr aus Modellen diskreter Entscheidungen, bei dem sich jeder Passagier für die Alternative mit dem größten Nutzen entscheidet. Die Pa-

parameter der Modelle werden durch Beobachtungen oder Befragungen der Passagiere über ihr Verhalten geschätzt. Wir stellen die Modelle diskreter Entscheidungen in Kapitel 6 vor und verwenden sie, um eine Nachfragefunktion für unser Fahrpreisplanungsmodell zu konstruieren.

4.3 Zusammenfassung

Wir haben in diesem Kapitel ein Modell besprochen, mit dem wir für ein gegebenes Preissystem die Einnahmen (bzw. den Erlös) maximieren können. Da wir konstante Kosten annehmen, entspricht die Maximierung der Einnahmen einer Maximierung der Gewinne.

Wir haben gesehen, dass das Fahrpreisplanungsproblem in seiner allgemeinen Form als Spezialfall das Problem der quadratischen Programmierung enthält und damit NP-schwer ist.

In Abschnitt 4.1.1 wurden Anwendungen unseres Fahrpreisplanungsmodells auf einige Preissysteme dargestellt. Diese Betrachtungen haben gezeigt, dass mit diesem Modell eine differenzierte Preisbetrachtung möglich ist.

Insgesamt können beim Vergleich des Fahrpreisplanungsmodells mit den Modellen aus der Literatur, die in Abschnitt 3.5.1 vorgestellt wurden, folgende Punkte zusammengefasst werden:

1. Viele Artikel, die sich mit einer optimalen Preisplanung im ÖPNV beschäftigen, sind ähnlich zu dem Artikel von Pedersen [21] in dem Sinn, dass sie keine konkreten mathematischen Berechnungen, sondern nur theoretische Analysen durchführen. Wir werden am Ende dieser Arbeit ein Modell erhalten, mit dem wir für einfache Preissysteme die Preise gut optimieren können.
2. In den Modellen von Kocur und Hendrickson [16] und De Borger, Mayeres, Proost und Wouters [8] wird meistens mit einer Preisvariablen für den öffentlichen Nahverkehr gerechnet. De Borger et al. unterscheiden noch in Haupt- und Nebenverkehrszeit. Wir haben die Möglichkeit verschiedene Preise für eine Verbindung auszurechnen. Außerdem kann ein Fahrpreis im Fahrpreisplanungsmodell von mehreren Preisvariablen abhängen. Dies ermöglicht eine differenzierte Preisbetrachtung.
3. Unser Modell kann individuell auf verschiedenen Situationen und Verkehrsgebiete angepasst werden, da für verschiedene OD-Paare unterschiedliche Nachfragefunktionen gewählt werden können.

In den nächsten beiden Kapiteln wird es nun darum gehen, die Nachfragefunktion zu konkretisieren. Wie bereits erwähnt werden wir in Kapitel 5 elementare Funktionen (z. B. lineare und quadratische Funktionen) als Modell für eine Nachfragefunktion untersuchen. In Kapitel 6 wenden wir uns

dann den Entscheidungsmodellen und einer Konstruktion der Nachfragefunktion aus diesen Entscheidungsmodellen zu. Auf dieser Grundlage folgen in Kapitel 7 Berechnungsbeispiele.

Kapitel 5

Nachfragemodell mit elementaren Funktionen

In diesem Kapitel wird die Idee verfolgt, eine möglichst elementare Funktion als Modell für eine Nachfragefunktion zu nutzen. Hier werden insbesondere lineare, quadratische Funktionen und Exponentialfunktionen verwendet.

Ein erster Schritt hierbei ist, nur eine Reisealternative zu betrachten, d. h. in diesem Fall ist $|\mathcal{R}_{st}| = 1$. Wir verzichten daher in diesem Kapitel auf den Index i (als Ausdruck für eine bestimmte Reisealternative) bei Nachfrage- und Fahrpreisfunktion. Die Reisealternative ist im Folgenden ein Einzelticket für eine Bahnfahrt.

Gleichzeitig dienen die Betrachtungen in diesem Kapitel zur Veranschaulichung des Fahrpreisplanungsproblems. Wir werden die Lösbarkeit des Problems mit verschiedenen elementaren Funktionen untersuchen.

Bei einer gleichzeitigen Behandlung mehrerer Ticketarten bzw. mehrerer Reisealternativen ist es schwierig, eine elementare Funktion als Modell für eine Nachfragefunktion zu finden.

Nachdem in Abschnitt 5.1 die Bedingungen an die Modellnachfragefunktion zusammengefasst wurden, werden in Abschnitt 5.2 drei Modellnachfragefunktionen vorgestellt. Für jede der drei Funktionen wird das entsprechende Fahrpreisplanungsproblem angegeben, dessen Lösbarkeit in Abschnitt 5.3 erörtert wird. In Abschnitt 5.4 werden die Ergebnisse zusammengefasst und die Verwendung von elementaren Funktionen als Modellnachfragefunktionen diskutiert.

5.1 Bedingungen an die Modellnachfragefunktion

Sei $|\mathcal{R}_{st}| = 1$. Es gibt damit für jedes OD-Paar (s, t) genau eine Fahrpreisfunktion und genau eine Nachfragefunktion.

Wir nehmen an, dass die Nachfragefunktion monoton fallend ist und nichtnegative Werte annimmt.

Für ein mögliches Modell einer Nachfragefunktion \tilde{x}_{st} (bzw. $x_{st} = \tilde{x}_{st} \circ f_{st}$) fordern wir deshalb folgende zwei Bedingungen:

- $\tilde{x}_{st} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ bzw.
 $x_{st} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$
- \tilde{x}_{st} ist monoton fallend. Damit folgt für x_{st} und $\forall \mathbf{p}, \hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n$:
 $f_{st}(\hat{\mathbf{p}}) \geq f_{st}(\mathbf{p}) \Rightarrow x_{st}(\hat{\mathbf{p}}) = \tilde{x}_{st}(f_{st}(\hat{\mathbf{p}})) \leq \tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p})) = x_{st}(\mathbf{p})$

5.2 Beispiele von Modellnachfragefunktionen

Da wir elementare Funktionen zur Modellierung einer Nachfragefunktion nutzen wollen, ergeben sich unter Beachtung der oben genannten Bedingungen unter anderem folgende Möglichkeiten. Dabei definieren wir die lineare bzw. die quadratische Nachfragefunktion stückweise:

- lineare Nachfragefunktion

$$x_{st}(\mathbf{p}) = \tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p})) = \begin{cases} -\alpha_{st} \cdot f_{st}(\mathbf{p}) + \beta_{st} & \text{für } f_{st}(\mathbf{p}) \leq \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st}} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\alpha_{st}, \beta_{st} \in \mathbb{R}_+, \quad (5.1)$$

- quadratische Nachfragefunktion

$$x_{st}(\mathbf{p}) = \tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p})) = \begin{cases} \alpha_{st}(f_{st}(\mathbf{p}) - \beta_{st})^2 & \text{für } f_{st}(\mathbf{p}) \leq \beta_{st} \\ 0 & \text{für } f_{st}(\mathbf{p}) > \beta_{st} \end{cases}$$

$$\alpha_{st}, \beta_{st} \in \mathbb{R}_+, \quad (5.2)$$

- exponentielle Nachfragefunktion

$$x_{st}(\mathbf{p}) = \tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p})) = \alpha_{st} \cdot \exp(-\beta_{st} \cdot f_{st}(\mathbf{p}))$$

$$\alpha_{st}, \beta_{st} \in \mathbb{R}_+. \quad (5.3)$$

In Abbildung 5.1 sind die drei Modellnachfragefunktionen für ein (s, t) Paar in Abhängigkeit von der Fahrpreisfunktion $f_{st}(\mathbf{p})$ dargestellt.

Die genaue Festlegung der Parameter erfolgt im Kapitel 7.

Wir verwenden folgende Notation: Für $y \in \mathbb{R}$ sei $[y]^- := \min\{y, 0\}$ bzw. $[y]^+ := \max\{y, 0\}$.

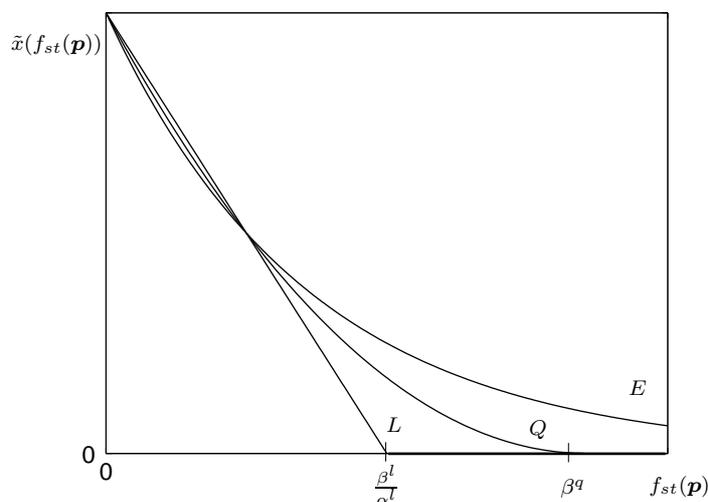


Abbildung 5.1: Modellnachfragefunktionen: Hierbei ist L die lineare Nachfragefunktion, Q die quadratische Nachfragefunktion und E die exponentielle Nachfragefunktion.

Für unser *Fahrpreisplanungsproblem* (FPP) ergibt sich im Fall einer

- linearen Nachfragefunktion:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} [-\alpha_{st} \cdot f_{st}(\mathbf{p}) + \beta_{st}]^+ \cdot f_{st}(\mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} \in P, \end{aligned} \quad (5.4)$$

- quadratischen Nachfragefunktion:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \alpha_{st} \cdot ([f_{st}(\mathbf{p}) - \beta_{st}]^-)^2 \cdot f_{st}(\mathbf{p}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} \in P, \end{aligned} \quad (5.5)$$

- exponentiellen Nachfragefunktion:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \alpha_{st} \cdot \exp(-\beta_{st} \cdot f_{st}(\mathbf{p})) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} \in P. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.3 Mathematische Diskussion

Wir wollen uns die Lösbarkeit bzw. die Beschaffenheit der Maximierungsprobleme für die drei vorgeschlagenen Nachfragefunktionen ansehen.

Zunächst diskutieren wir ausführlich das Fahrpreisplanungsproblem für den Fall einer linearen Nachfragefunktion und den einfachsten nichttrivialen

Fall einer Fahrpreisfunktion (eine eindimensionale lineare Fahrpreisfunktion). Wir verallgemeinern die Ergebnisse auf den Fall einer mehrdimensionalen affin-linearen Fahrpreisfunktion.

Das Fahrpreisplanungsproblem mit einer quadratischen oder exponentiellen Nachfragefunktion wird nur beispielhaft diskutiert.

5.3.1 Lineare Nachfragefunktion

Eindimensionale lineare Fahrpreisfunktion

Es seien die Fahrpreisfunktionen gegeben durch:

$$f_{st}(p) = c_{st} \cdot p, \quad c_{st} > 0 \quad \forall (s, t) \in \mathcal{D}, p \in \mathbb{R}_+.$$

In diesem Fall ist die lineare Nachfragefunktion

$$x_{st}(p) = \begin{cases} -\alpha_{st} \cdot c_{st} \cdot p + \beta_{st} & \text{für } c_{st} \cdot p \leq \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st}} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. $x_{st}(p)$ ist für $p \in \mathbb{R}_+ \setminus \{\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}}\}$ stetig differenzierbar. An der Stelle $p = \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}}$ ist sie stetig aber nicht differenzierbar. Auch die Einnahmefunktion $e_{st}(p) = c_{st} \cdot p \cdot x_{st}(p)$ ist an dieser Stelle nicht differenzierbar:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{e_{st}(\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}} + h) - e_{st}(\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}})}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{c_{st} \cdot (\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}} + h) \cdot (-\alpha_{st} \cdot c_{st} (\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}} + h) + \beta_{st}) - 0}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} \frac{c_{st} \cdot (\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}} + h) \cdot (-\alpha_{st} \cdot c_{st} \cdot h)}{h} = -c_{st} \cdot \beta_{st} \\ \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{e_{st}(\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}} + h) - e_{st}(\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}})}{h} &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{c_{st} \cdot (\frac{\beta_{st}}{\alpha_{st} \cdot c_{st}} + h) \cdot 0 - 0}{h} = 0 \end{aligned}$$

Insgesamt ist $e(p) = \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} e_{st}(p)$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit höchstens $|\mathcal{D}|$ nichtdifferenzierbaren Stellen.

Wir führen folgende Notation ein:

Sei $d := |\mathcal{D}|$. Für alle $j = 1, \dots, d$ existiert eindeutig ein Paar (s, t) , d. h. $j \hat{=} (s, t)$ und $0 =: \frac{\beta_0}{\alpha_0 \cdot c_0} \leq \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}} \leq \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j}$ für $j = 2, \dots, d$.

Satz 5.1. *Mit den obigen Voraussetzungen an die Fahrpreisfunktionen und der eingeführten Notation ist das Maximierungsproblem für jedes $j = 1, \dots, d$*

$$\begin{aligned} \max \quad & e(p) := \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} c_{st} \cdot p \cdot [-\alpha_{st} \cdot c_{st} \cdot p + \beta_{st}]^+ \\ \text{s. t.} \quad & p \geq \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}} \\ & p \leq \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j} \end{aligned} \tag{5.7}$$

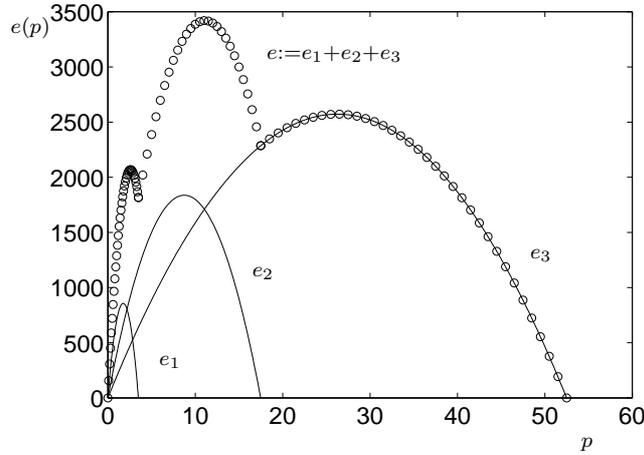


Abbildung 5.2: Einnahmefunktion (e) über drei OD-Paare für die lineare Nachfragefunktion. e_i ist die Einnahmefunktion für das i -te OD Paar ($i = 1, 2, 3$).

eindeutig lösbar, und für $p \in \left[\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}}, \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j} \right]$ ist jedes lokale Optimum von $e(p)$ ein globales Optimum.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Einnahmefunktion

$$e(p) = \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} e_{st}(p) = \sum_{i=1}^d e_i(p)$$

für $\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}} \leq p \leq \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j}$, $j = 1, \dots, d$ streng konkav ist:

Ist $j = 1$, so gilt $e_i(p) > 0 \forall i = 1, \dots, d$ und $p \in (0, \frac{\beta_1}{\alpha_1 \cdot c_1})$. Für $j \geq 2$ und $i = 1, \dots, j-1$ ist $e_i(p) = 0$.

Wir betrachten daher $k \in \{j, \dots, d\}$ (beliebig) und $e_k(p)$. Auf $p \in (\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}}, \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j})$ ist $e_k(p)$ zweimal differenzierbar und wir können für jedes $k \in \{j, \dots, d\}$ die zweite Ableitung von $e_k(p)$ betrachten. Es gilt

$$(e_k(p))'' = -2 \cdot \alpha_k \cdot c_k^2 < 0 \quad (\text{da } \alpha_k > 0),$$

d. h. $e_k(p)$ ist streng konkav.

Da die Summe streng konkaver Funktionen streng konkav ist, ist $e(p)$ streng konkav.

\Rightarrow Jedes lokale Maximum ist ein globales Maximum und die Lösung von (5.7) ist eindeutig bestimmt. \square

Bemerkung 5.2. Die Einnahmefunktion $e(p)$ kann damit bis zu $|\mathcal{D}|$ lokale Maxima haben, betrachte dazu auch Abbildung 5.2.

Für jedes Intervall $\left(\frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}}, \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j}\right)$ ($j = 1, \dots, d$) von p kann der lokale Optimalwert analytisch durch die Nullstellenbestimmung der ersten Ableitung bestimmt werden:

$$p_j = \frac{\beta_j}{2 \cdot \alpha_j \cdot c_j} \quad \text{falls} \quad \frac{\beta_{j-1}}{\alpha_{j-1} \cdot c_{j-1}} < \frac{\beta_j}{2 \cdot \alpha_j \cdot c_j} < \frac{\beta_j}{\alpha_j \cdot c_j}. \quad (5.8)$$

(Andernfalls setzen wir $p_j := 0$.) Wir haben gesehen, dass es auf jedem Intervall nur einen Maximalwert geben kann. Eine Randwertbetrachtung der einzelnen Intervalle muss bei der Ermittlung des Maximalwertes nicht durchgeführt werden, da das globale Maximum der Gesamteinnahmefunktion (ohne Beschränkung an $p \in \mathbb{R}_+$) nicht auf dem Rand eines Intervalls liegen kann: Für die Gesamteinnahmefunktion gilt, dass sie für $p = 0$ und $p \geq \frac{\beta_d}{\alpha_d \cdot c_d}$ null ist und für $p \in (0, \frac{\beta_d}{\alpha_d \cdot c_d})$ setzt sie sich aus nichtnegativen, streng konkaven Funktionen zusammen.

Um das globale Maximum p_{\max} zu bestimmen, müssen im ungünstigsten Fall $|\mathcal{D}| = d$ Gleichungen der Form (5.8) berechnet werden. Für das globale Maximum gilt dann: $p_{\max} = \max_j \{e(p_j)\}$.

Eine Betrachtung mit affin-linearen eindimensionalen Nachfragefunktionen kann analog durchgeführt werden.

Mehrdimensionale affin-lineare Nachfragefunktion

Die Fahrpreisfunktionen seien eine Linearkombination der Preisvariablen:

$$\begin{aligned} f_{st}(\mathbf{p}) &= c_{st}^0 + c_{st}^1 \cdot p_1 + c_{st}^2 \cdot p_2 + \dots + c_{st}^n \cdot p_n \\ &= c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit $c_{st}^0 \geq 0$, $c_{st}^i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $n \geq 2$ und $\mathbf{c}_{st} = (c_{st}^1, \dots, c_{st}^n)^T$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$.

Dann gilt für die lineare Nachfragefunktion

$$x_{st}(\mathbf{p}) = \begin{cases} -\alpha_{st} \cdot (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p}) + \beta_{st} & \text{für } \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p} \leq \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st}} - c_{st}^0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im eindimensionalen Fall haben wir die maximalen Intervalle für p gefunden, für die die Gesamteinnahmefunktion $e(p)$ differenzierbar ist. Es gibt Konstruktionen der Nachfragefunktion, bei denen in jedem dieser Intervalle ein lokales Maximum der Einnahmefunktion existiert, das nicht auf dem Rand liegt.

Im Folgenden wird veranschaulicht, dass man im mehrdimensionalen Fall Gebiete für \mathbf{p} finden kann, für die es ähnliche Konstruktionen gibt.

Für die Einnahmefunktion eines OD-Paares (s, t) gilt

$$e_{st}(\mathbf{p}) = 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p} \geq \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st}} - c_{st}^0.$$

Wir betrachten zwei disjunkte Menge \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 mit $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$ und das folgende Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & e(\mathbf{p}) := \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p}) \cdot [-\alpha_{st} \cdot (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p}) + \beta_{st}]^+ \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p} \geq \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st}} - c_{st}^0 \quad \forall (s, t) \in \mathcal{D}_1 \\ & \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p} \leq \frac{\beta_{st}}{\alpha_{st}} - c_{st}^0 \quad \forall (s, t) \in \mathcal{D}_2 \\ & p_1, \dots, p_n \geq 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

In diesem Fall ist $e(\mathbf{p})$ konkav:

- $e_{st}(\mathbf{p}) = 0$ für $(s, t) \in \mathcal{D}_1$ (ist konkav).
- $e_{st}(\mathbf{p}) = (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p}) \cdot (-\alpha_{st} \cdot (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p}) + \beta_{st})$
 $= -\alpha_{st} \cdot (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p})^2 + \beta_{st} \cdot (c_{st}^0 + \mathbf{c}_{st}^T \mathbf{p})$ für $(s, t) \in \mathcal{D}_2$.

Für die zweite Ableitung gilt

$$\frac{\partial^2 e_{st}(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j} = -2 \cdot \alpha_{st} \cdot c_{st}^i \cdot c_{st}^j,$$

d. h. die Hesse Matrix hat die Form

$$\mathbf{H} = -2 \cdot \alpha_{st} \cdot \begin{pmatrix} (c_{st}^1)^2 & c_{st}^1 \cdot c_{st}^2 & \dots & c_{st}^1 \cdot c_{st}^n \\ c_{st}^2 \cdot c_{st}^1 & (c_{st}^2)^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & c_{st}^{n-1} \cdot c_{st}^n \\ c_{st}^n \cdot c_{st}^1 & \dots & c_{st}^n \cdot c_{st}^{n-1} & (c_{st}^n)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass die Hesse Matrix negativ semidefinit ist:

Z.z.: Für alle $\alpha_{st} > 0$, $c_{st}^i > 0$, $x_i \in \mathbb{R}$, $i = \{1, \dots, n\}$ ist

$$x^T H x = -2 \cdot \alpha_{st} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (c_{st}^i)^2 \cdot x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n c_{st}^i \cdot c_{st}^j \cdot x_i \cdot x_j \right) \leq 0.$$

Dies folgt aus

$$0 \leq \left(\sum_i c_{st}^i \cdot x_i \right)^2 = \sum_i (c_{st}^i)^2 \cdot x_i^2 + \sum_{i \neq j} c_{st}^i \cdot c_{st}^j \cdot x_i \cdot x_j.$$

Aus der positiven Semidefinitheit der Hessematrix für eine konvexe Menge ergibt sich die Konvexität der Funktion auf dieser Menge (siehe z. B. Alt [1]). Analog dazu ist die Einnahmefunktion $e_{st}(\mathbf{p})$ auf dem betrachteten Intervall konkav, da die Hesse Matrix negativ semidefinit ist.

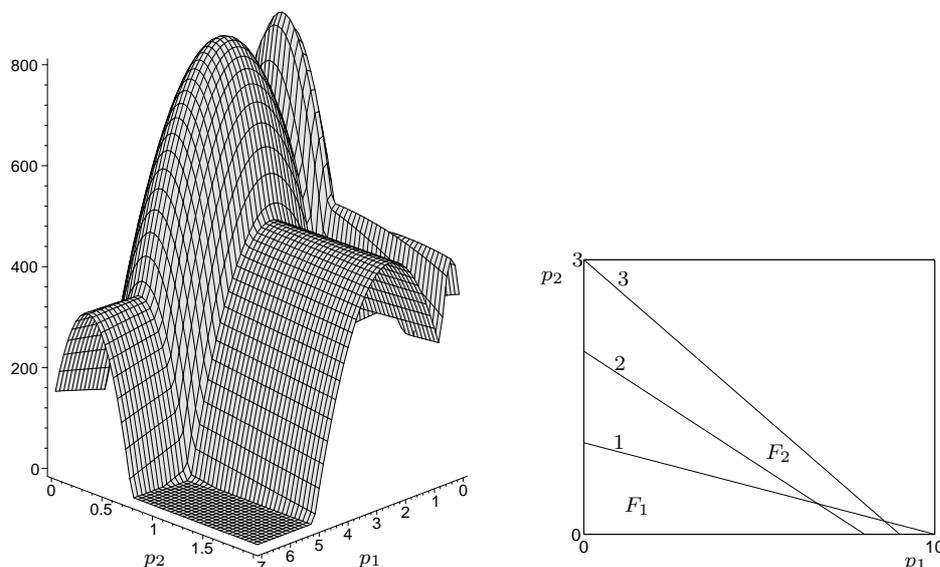


Abbildung 5.3: Links: Einnahmefunktion abhängig von zwei Variablen p_1 und p_2 für $|\mathcal{D}| = 3$ für die lineare Nachfragefunktion. Rechts: Beispiel für ein Hyperebenenarrangement

Die Einnahmefunktion $e(\mathbf{p})$ ist somit eine Summe von konkaven Funktionen. Folgerung: Jedes lokale Maximum auf dem betrachteten Gebiet ist ein globales Maximum, (Alt [1]).

Die Lösbarkeit des Optimierungsproblems (5.10) hängt von der Wahl der Mengen \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 ab. Dabei können auch zwei verschiedene disjunkte Zerlegungen der Menge \mathcal{D} zu dem gleichen Optimierungsproblem führen, da es viele redundante Ungleichungen geben kann.

Wir überlegen uns nun, wie viele verschiedene Möglichkeiten zur Wahl der Mengen es gibt, so dass das Optimierungsproblem lösbar ist. Dazu formulieren wir die Nebenbedingungen als Gleichungen. Die Gleichungen beschreiben Hyperebenen in einem n -dimensionalen Raum. Jedes Gebiet, das vollständig von Hyperebenen eingeschlossen ist (d. h. es gibt keine Hyperebene, die das Gebiet durchtrennt), beschreibt einen zulässigen Bereich für das Problem (5.10), in dem die Gesamteinnahmefunktion $e(\mathbf{p})$ konkav ist.

Beispiel 5.3. Als Beispiel betrachten wir $\mathcal{D} = \{1, 2, 3\}$ und

$$x_i(p_1, p_2) = [-\alpha_i \cdot (c_i^0 + c_i^1 \cdot p_1 + c_i^2 \cdot p_2) + \beta_i]^+, \quad i = 1, 2, 3.$$

In Abbildung 5.3 rechts sind die Hyperebenen $(c_i^1 \cdot p_1 + c_i^2 \cdot p_2) = \frac{\beta_i}{\alpha_i} - c_i^0$ für $i = 1, 2, 3$ dargestellt (gekennzeichnet durch 1, 2 bzw. 3). Um beispielsweise das Gebiet F_1 bezogen auf das Optimierungsproblem (5.10) zu erhalten, muss man \mathcal{D} zerlegen in $\mathcal{D}_1 = \emptyset$ und $\mathcal{D}_2 = \{1, 2, 3\}$, für F_2 ist eine Zerlegung in

$\mathcal{D}_1 = \{1, 2\}$ und $\mathcal{D}_2 = \{3\}$ nötig. In diesem Beispiel ergibt die Zerlegung in $\mathcal{D}_1 = \{1, 3\}$ und $\mathcal{D}_2 = \{2\}$ die leere Menge.

Mit der Theorie über Arrangements von Hyperebenen (siehe z. B. Grünbaum [12]) können wir die Höchstanzahl \mathcal{H} dieser Gebiete bestimmen. Es gilt:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^n \binom{|\mathcal{D}|}{i} \in O(|\mathcal{D}|^n)$$

Wir können damit von der Ordnung $O(|\mathcal{D}|^n)$ viele Maximierungsprobleme in der Art von (5.10) betrachten und theoretisch ebenso viele lokale Maxima für die Einnahmefunktion mit der linearen Nachfragefunktion erhalten. In Abbildung 5.3 links ist eine mögliche Einnahmefunktion am Beispiel von zwei Variablen ($n = 2$) für $|\mathcal{D}| = 3$ dargestellt.

5.3.2 Quadratische und exponentielle Nachfragefunktion

Es soll hier nicht explizit erklärt werden, wie die Lösbarkeit des Fahrpreisplanungsproblems im Fall einer quadratischen und exponentiellen Nachfragefunktion aussieht, sondern nur kurz umrissen werden, welche Ausmaße das Problem annehmen kann.

Die quadratische Nachfragefunktion ist wie die lineare Nachfragefunktion stückweise definiert. Sie ist im Gegensatz zur linearen Nachfragefunktion

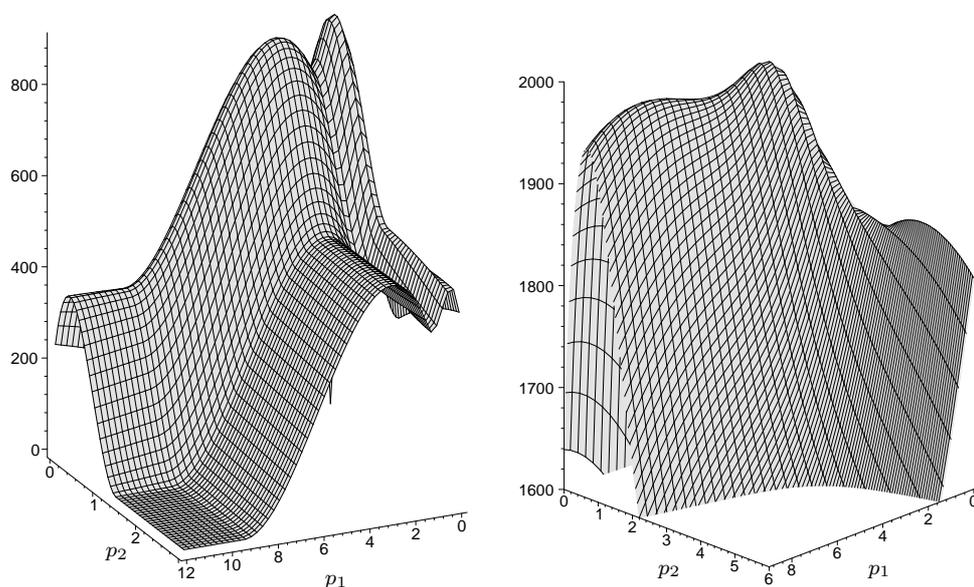


Abbildung 5.4: Links: Einnahmefunktion abhängig von zwei Variablen p_1 und p_2 für $|\mathcal{D}| = 3$ für die quadratische Nachfragefunktion. Rechts: Einnahmefunktion abhängig von zwei Variablen p_1 und p_2 für $|\mathcal{D}| = 3$ für die exponentielle Nachfragefunktion.

überall total differenzierbar. Auch hier kann \mathbb{R}_+^n in verschiedene Gebiete unterteilt werden analog zur linearen Nachfragefunktion. Allerdings ist die Einnahmefunktion auf diesen Gebieten im Allgemeinen nicht konkav. Es ist jedoch möglich, dass auf jedem Gebiet ein lokales Maximum existiert, das nicht auf dem Rand liegt. Die Anzahl der Gebiete kann ebenfalls von der Ordnung $O(|\mathcal{D}|^n)$ sein. Für ein Beispiel einer Einnahmefunktion mit der quadratischen Nachfragefunktion betrachte Abbildung 5.4 links. Die Berechnung eines lokalen Maximums durch analytische Verfahren ist sehr aufwendig und im Allgemeinen nicht mehr durchführbar, da für die notwendige Optimalitätsbedingung ein Gleichungssystem von n Gleichungen, wobei jede Gleichung aus einer Summe von bis zu $|\mathcal{D}|$ quadratischen Gleichungen bestehen kann, gelöst werden muss.

Die exponentielle Nachfragefunktion ist nicht stückweise definiert. Sie ist für $p \in (0, \infty)$ stets positiv und stetig differenzierbar. Eine analytische Berechnung der Maximalwerte ist für mehrere OD-Paare aber auch in diesem Fall praktisch nicht mehr durchführbar. Es kann auch hier mehrere lokale Maxima geben, betrachte dazu Abbildung 5.4 rechts. Allerdings ist es schwierig, anschauliche Beispiele mit mehreren lokalen Maxima zu konstruieren. Sie erstrecken sich meist auf einem großen Gebiet. Die einzelnen Maxima sind dann nur noch schwer zu erkennen.

5.4 Diskussion

Wir haben in diesem Kapitel die Modellierung unseres Fahrpreisplanungsmodells mit Hilfe von elementaren Funktionen als Modell für eine Nachfragefunktion untersucht. Dabei haben wir nur den Fall einer Reisealternative betrachtet.

Ziel dieses Kapitels war es, unser Fahrpreisplanungsmodell an einem einfachen Beispiel zu veranschaulichen. Die Betrachtungen in diesem Kapitel haben uns gezeigt, dass das Fahrpreisplanungsproblem von der Ordnung $|\mathcal{D}|^n$ viele lokale Lösungen haben kann. In unseren Berechnungen, Kapitel 7, konnten wir aber für verschiedene Beispiele Lösungen für das Fahrpreisplanungsproblem durch numerische Optimierungsverfahren ohne größere Probleme finden. Durch Abbildungen konnten wir veranschaulichen, dass es sich bei den gefundenen Lösungen um globale Maxima handelt.

Es ist allerdings nicht begründbar, dass eine der betrachteten elementaren Funktion ein gutes Modell für eine Nachfragefunktion ist. Neben der Nichtnegativität und der Monotonie bezüglich des Fahrpreises gibt es keine erklärenden Eigenschaften für das Nachfrageverhalten. Im Grunde hat bei dieser Modellierung jeder Verkehrsteilnehmer nur die Wahl zwischen fahren und nicht fahren. Ab einem gewissen Preis ist eine Fahrt mit dem ÖPNV zu teuer und der Passagier verzichtet darauf. Dies beschreibt die Situation eines Monopols. Es gibt keine Konkurrenzprodukte, zu denen ein Passagier

wechseln kann.

Es erklärt auch das Problem, eine elementare Funktion für mehrere Ticketarten zu finden, d. h. das Fahrpreisplanungsmodell für diesen Fall auf mehrere Reisealternativen zu übertragen. Verschiedene Ticketarten stehen zueinander in Konkurrenz. Die Entscheidung eines Passagiers zwischen zwei Ticketarten erfolgt nach konkreten Aspekten, da die Tickets untereinander verglichen werden müssen. Wann ist der Preis des einen Tickets zu teuer, der Preis des anderen für den Passagier aber noch annehmbar?

Die Verkehrsbetriebe können in dem Sinn als Monopol betrachtet werden, da sie keine direkten Konkurrenten in anderen Unternehmen haben, aber z. B. der private Autoverkehr kann durchaus als Konkurrent des Nahverkehrsunternehmens angesehen werden. Daher ist die Einbeziehung des Autoverkehrs bei der Bestimmung der Nachfrage ebenfalls sinnvoll.

Für eine realistischere Darstellung suchen wir daher eine Nachfragefunktion, die bezüglich verschiedener Alternativen (z. B. Auto, Monatsticket und Einzelticket) ein Entscheidungsverhalten abbildet, bei dem sich jeder Passagier für genau eine Alternative entscheidet.

Dies ist die Idee für das Modell, das im nächsten Kapitel vorgestellt wird.

Kapitel 6

Entscheidungsmodell

In diesem Kapitel wird die Möglichkeit vorgestellt, eine Nachfragefunktion aus der Abbildung des Entscheidungsverhaltens herzuleiten. Dazu betrachten wir nicht nur, ob ein Passagier aufgrund des Preises überhaupt fährt (wie es im Nachfragemodell mit elementaren Funktionen getan wurde), sondern alternative Möglichkeiten des Passagiers, um von einem Ort zu einem anderen Ort zu gelangen, z. B. Auto, Fahrrad und Bus. Diese Alternativen haben einen gewissen Nutzen für den Passagier, den wir in diesem Kapitel definieren werden. Auf Grund des Nutzens entscheidet sich der Passagier für eine Alternative. Um hier die Nachfragefunktion für unser Fahrpreisplanungsmodell zu erhalten, wird der Nutzen jeder Alternative von allen Preisvariablen abhängen.

In Abschnitt 6.1 erfolgt eine kurze Einführung in die Modelle diskreter Entscheidungen, vergleiche dazu Maier und Weiss [18] oder Ben-Akiva und Lerman [3]. Wir definieren die Nutzenfunktionen mit denen ein Passagier die verschiedenen Alternativen bewertet. Außerdem beschreiben wir, wie ein Beobachter, der keine vollständigen Informationen über die Nutzenfunktion besitzt, Aussagen über die Wahrscheinlichkeit treffen kann, mit der ein Passagier eine bestimmten Alternative wählt. Dazu werden wir Grundlagen aus der Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden.

In Abschnitt 6.2 stellen wir das Logit Modell vor, vergleiche auch hier mit Maier und Weiss [18] oder Ben-Akiva und Lerman [3]. Mit dem Logit Modell kann die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Passagier eine bestimmte Alternative wählt, analytisch berechnet werden. Daraus werden wir unsere Nachfragefunktion gewinnen.

Mit den in den ersten Abschnitten geschaffenen Grundlagen werden wir in Abschnitt 6.3 unser Fahrpreisplanungsproblem entwickeln.

6.1 Modelle diskreter Entscheidungen

Im Folgenden werden die Entscheidungen unabhängig von einem Individuum betrachtet, d. h. wir abstrahieren von persönlichen Vorlieben, sowie Bildungsstand und Einkommen.

Ein Passagier kann bezüglich seiner Reisemöglichkeiten zwischen unterschiedlichen Alternativen, z. B. Auto, Fahrrad, Einzelticket, Tageskarte, Monatskarte usw. wählen. Daher betrachten wir eine Alternativenmenge

$$A := \{a_1, \dots, a_n\} \quad (6.1)$$

und einen Vektor von Charakteristika $\mathbf{C}(a)$ für jede Alternative $a \in A$, der die Alternative näher beschreibt. In dem Charakteristikavektor kann z. B. der Fahrpreis, die Fahrzeit oder der Grad des Komforts enthalten sein. Wir betrachten eine Funktion, die jeder Alternative einen Charakteristikavektor zuordnet

$$C : A \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad a \longmapsto \mathbf{C}(a) = (C_1(a), C_2(a), C_3(a), \dots, C_m(a)). \quad (6.2)$$

Jede Alternative hat durch die unterschiedliche Ausprägung seiner Charakteristika einen Nutzen für einen Passagier. Wir definieren eine Nutzenfunktion \tilde{U} , die jedem Charakteristikavektor einen reellwertigen Nutzen zuordnet

$$\tilde{U} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \mathbf{C} \longmapsto \tilde{U}(\mathbf{C}). \quad (6.3)$$

Die Nutzenfunktion \tilde{U} beschreibt, wie ein Passagier die verschiedenen Ausprägungen der Charakteristika bewertet.

Als Ergebnis einer Verkettung von Funktionen erhalten wir eine Nutzenfunktion $U(a) = (\tilde{U} \circ C)(a)$, die jeder Alternative einen reellwertigen Nutzen zuordnet

$$U : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad a \longmapsto U(a) =: U^a. \quad (6.4)$$

Damit beschreibt die Nutzenfunktion U die Bewertung der Alternativen durch den Passagier.

Da (wie in Kapitel 3 schon erwähnt) angenommen wird, dass ein Nachfrager seinen Nutzen maximieren will, entscheidet er sich für die Alternative a_{opt} , die für ihn den größten Nutzen hat, d. h.

$$U^{a_{opt}} = \max_{b \in A} U^b. \quad (6.5)$$

Allerdings kennen wir, als Beobachter (bzw. als diejenigen, die die Preise für den öffentlichen Nahverkehr bestimmen wollen), nicht alle Charakteristika, die den Nutzen einer Alternative beeinflussen.

Daher zerfällt für uns der Nutzen der Passagiere in einen beobachtbaren Nutzen bzw. den Nutzen, den wir durch bestimmte Charakteristika erklären können (z. B. den Preis) und in einen Zufallsnutzen, den Nutzen, den wir

nicht durch bestimmte Charakteristika erklären können. Der erste Term ist der deterministische Nutzen V und der zweite Term ist der Zufallsnutzen bzw. der Störterm ν

$$U^a = V^a + \nu^a. \quad (6.6)$$

Wir können nun Aussagen darüber treffen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Passagier eine bestimmte Alternative wählt. Sie soll im Folgenden als Auswahlwahrscheinlichkeit bezeichnet werden. Die Auswahlwahrscheinlichkeit der Alternative a_1 , ist z. B.

$$\begin{aligned} P^{a_1} : &= \mathbb{P} \left(V^{a_1} + \nu^{a_1} = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{V^{a_j} + \nu^{a_j}\} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(V^{a_1} + \nu^{a_1} \geq V^{a_j} + \nu^{a_j}, j = 2, \dots, n \right) \\ &= \mathbb{P} \left(V^{a_1} + \nu^{a_1} - V^{a_j} \geq \nu^{a_j}, j = 2, \dots, n \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Um die Wahrscheinlichkeit für eine Alternative berechnen zu können, benötigt man Wissen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung von U bzw. ν . Wir nehmen an, dass die Störterme ν stetige, reelle Zufallsvariablen sind.

Angenommen wir hätten für die Zufallsvariablen eine gemeinsame Dichtefunktion f gegeben, d. h.

$$\mathbb{P}(\nu^{a_1} \leq c_1, \dots, \nu^{a_n} \leq c_n) = \int_{-\infty}^{c_1} \int_{-\infty}^{c_2} \dots \int_{-\infty}^{c_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1.$$

Dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit für Alternative a_1 , Gleichung (6.7) berechnen durch

$$P^{a_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{V^{a_1} + x_1 - V^{a_2}} \dots \int_{-\infty}^{V^{a_1} + x_1 - V^{a_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1. \quad (6.8)$$

Gleichung (6.8) beinhaltet genau so viele Integrale wie es Alternativen gibt. Deshalb ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Passagier eine Alternative wählt, auch schon bei einer recht geringen Zahl an Alternativen sehr aufwendig. Allerdings gibt es Annahmen über die Verteilung der Störterme, für die Gleichung (6.7) eine analytische Lösung besitzt. Bei dem im nächsten Abschnitt eingeführten Logit Modell wird eine solche Verteilung für die Störterme angenommen.

6.2 Logit Modell

Für das Logit Modell werden die Störterme als unabhängig identisch Gumbel-verteilt angenommen. Deshalb wird zunächst die Gumbel-Verteilung vorgestellt und die zur Herleitung des Logit Modells wichtigen Eigenschaften zusammengefasst.

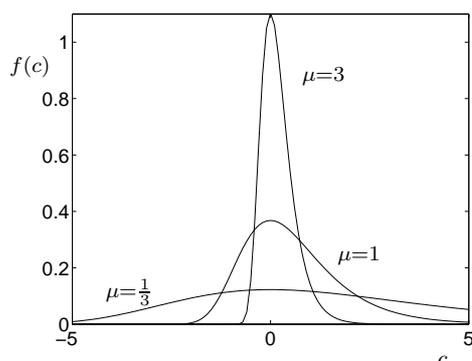


Abbildung 6.1: Dichtefunktion der Gumbel-Verteilung mit verschiedenen Werten für den Skalierungsparameter μ . Hier ist der Lageparameter $\eta = 0$.

6.2.1 Gumbel-Verteilung

Die Dichtefunktion der Gumbel-Verteilung ist definiert als

$$f(c) = \mu e^{-\mu(c-\eta)} \exp(-e^{-\mu(c-\eta)}). \quad (6.9)$$

Man erhält als Verteilungsfunktion der Gumbel-Verteilung:

$$F(c) = \exp(-e^{-\mu(c-\eta)}). \quad (6.10)$$

Dabei ist $\mu > 0$ ein Skalierungsparameter und η ein Lageparameter. Abbildung 6.1 zeigt die Dichtefunktion der Gumbel-Verteilung für $\eta = 0$ und verschiedene μ .

Für die Gumbel-Verteilung gelten folgende Eigenschaften:

1. Der Erwartungswert ist $\eta + \frac{\gamma}{\mu}$. Hierbei ist $\gamma \approx 0,577$ die Eulersche Konstante.
2. Die Varianz ist $\frac{\pi^2}{6 \cdot \mu^2}$.
3. Ist ν Gumbel-verteilt mit den Parametern (η, μ) , dann ist $\alpha\nu + \beta$ Gumbel-verteilt mit Parametern $(\alpha\eta + \beta, \frac{\mu}{\alpha})$, wobei $\alpha > 0$ und $\beta \in \mathbb{R}$ beliebige Konstanten sind.
4. Sind ν_1 und ν_2 unabhängig Gumbel-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern (η_1, μ) bzw. (η_2, μ) , dann ist die Differenz $\tilde{\nu} = \nu_1 - \nu_2$ logistisch verteilt mit der Verteilungsfunktion

$$F_{\tilde{\nu}}(x) = \frac{1}{1 + e^{\mu(\eta_1 - \eta_2 - x)}}.$$

5. Seien ν_1, \dots, ν_m unabhängig Gumbel-verteilte Zufallsvariablen mit Parametern (η_i, μ) , $i = \{1, \dots, m\}$. Dann ist das Maximum, $\max_{i \in \{1, \dots, m\}} \{\nu_i\}$, eine Gumbel-verteilte Zufallsvariable mit Parametern

$$\left(\frac{1}{\mu} \ln \sum_{i=1}^m e^{\mu \eta_i}, \mu \right).$$

6.2.2 Herleitung des Logit Modells

Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier die Alternative a_i wählt:

$$P^{a_i} := \mathbb{P} \left(V^{a_i} + \nu^{a_i} \geq \max_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus i} \{V^{a_j} + \nu^{a_j}\} \right) \quad (6.11)$$

Für alle $a \in A$ wird der Zufallsnutzen ν^a als Gumbel-verteilt mit Parametern (η, μ) angenommen. Zur Vereinfachung sei hier $\eta = 0$.

Aus Eigenschaft 3 wissen wir, dass $V^{a_j} + \nu^{a_j}$ eine Zufallsvariable mit Parametern (V^{a_j}, μ) ist. Mit Eigenschaft 5 folgt, dass das Maximum in (6.11) $\max_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus i} \{V^{a_j} + \nu^{a_j}\} =: \tilde{\nu}$ eine Gumbel-verteilte Zufallsvariable ist mit Parametern

$$(\tilde{V}, \mu) \quad \text{mit} \quad \tilde{V} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e^{\mu V^{a_j}}.$$

Gleichung (6.11) lässt sich nun schreiben als

$$\begin{aligned} P^{a_i} &= \mathbb{P} \left(V^{a_i} + \nu^{a_i} \geq \tilde{\nu} \right) \\ &= \mathbb{P} \left(V^{a_i} \geq \tilde{\nu} - \nu^{a_i} \right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Die Differenz $\tilde{\nu} - \nu^{a_i}$ ist nach Eigenschaft 4 logistisch verteilt. Damit gilt für die Auswahlwahrscheinlichkeit der Alternative a_i :

$$\begin{aligned} P^{a_i} &= \frac{1}{1 + e^{\mu(\tilde{V} - V^{a_i})}} = \frac{e^{\mu V^{a_i}}}{e^{\mu V^{a_i}} + \exp(\ln \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n e^{\mu V^{a_j}})} \\ &= \frac{e^{\mu V^{a_i}}}{\sum_{j=1}^n e^{\mu V^{a_j}}}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Wir haben damit eine geschlossene Form zur Berechnung der Auswahlwahrscheinlichkeit der Alternative a_i gefunden. Diese Gleichung werden wir in Abschnitt 6.3 (bei der Anwendung auf das Fahrpreisplanungsmodell) zur Bestimmung der erwarteten Nachfragemengen verwenden.

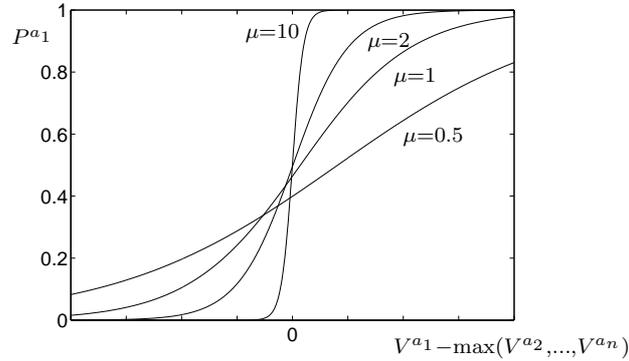


Abbildung 6.2: Auswahlwahrscheinlichkeiten der Alternative a_1 im Logit Modell für verschiedene Werte des Skalierungsparameters μ .

6.2.3 Eigenschaften des Logit Modells

Es werden zwei wichtige Eigenschaften des Logit Modells behandelt, da sie bei der Entwicklung des Fahrpreisplanungsmodells eine gewisse Rolle spielen.

Zunächst zeigen wir, dass sich die Auswahlwahrscheinlichkeiten über alle Alternativen auf Eins summieren:

$$\sum_{i \in A} P^{a_i} = \sum_{i \in A} \frac{e^{\mu V^{a_i}}}{\sum_{j \in A} e^{\mu V^{a_j}}} = \frac{\sum_{i \in A} e^{\mu V^{a_i}}}{\sum_{j \in A} e^{\mu V^{a_j}}} = 1.$$

Weiterhin gilt, dass die Auswahlwahrscheinlichkeit für eine Alternative a zwischen Null und Eins liegt: $P^a \in (0, 1)$. Eine Auswahlwahrscheinlichkeit von Null bzw. Eins für eine Alternative $a \in A$ wird nur im Grenzfall angenommen, d. h. falls der deterministische Nutzen der Alternative a gegen minus Unendlich bzw. Unendlich geht.

Einfluss des Skalierungsparameters μ

Für die Auswahlwahrscheinlichkeit einer Alternative, o.B.d.A Alternative a_1 , gilt

$$P^{a_1} = \frac{e^{\mu V^{a_1}}}{\sum_{j=1}^n e^{\mu V^{a_j}}} = \frac{1}{1 + \sum_{j=2}^n e^{\mu(V^{a_j} - V^{a_1})}}. \quad (6.14)$$

Gleichung (6.14) macht deutlich, dass für die Auswahlwahrscheinlichkeiten die Nutzdifferenzen relevant sind. Sie werden durch den Parameter μ gewichtet. Je größer μ ist, desto stärker wirkt sich die Nutzdifferenz auf die Alternativenwahl aus, d. h. desto kleiner ist der Einfluss des Störterms.

In Abbildung 6.2 ist die Auswahlwahrscheinlichkeit der Alternative a_1 als Funktion abhängig von ihrem deterministischen Nutzen für verschiedene Werte von μ dargestellt. Die deterministischen Nutzen der anderen Alternativen sind hierbei konstant. Man kann gut erkennen, dass der Einfluss des Störterms umso größer ist, je kleiner μ wird und umgekehrt. Für $\mu \rightarrow \infty$ wird die Funktion der Auswahlwahrscheinlichkeit zu einer Treppenfunktion. Der Zufallsnutzen verschwindet und die Entscheidung ist rein deterministisch. Man kann dieses Verhalten auch aus der Varianz der Gumbelverteilung herleiten. Für $\mu \rightarrow \infty$ geht die Varianz der Gumbelverteilung, Eigenschaft 2, gegen Null.

Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen

Das Logit Modell besitzt die IIA-Eigenschaft (IIA=Independence from Irrelevant Alternatives). Sie ist folgendermaßen definiert, Maier und Weiss [18]:

Definition 6.1. *Das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten zweier Alternativen ist unabhängig von Verfügbarkeit und Charakteristik anderer Alternativen. Formal ausgedrückt, gilt*

$$\frac{P^{a_i|a_i \in A}}{P^{a_j|a_j \in A}} = \frac{P^{a_i|a_i \in A'}}{P^{a_j|a_j \in A'}} \quad \text{mit } A \subseteq A',$$

hier ist $P^{a_i|a_i \in A}$ die Auswahlwahrscheinlichkeit für Alternative a_i unter Betrachtung der Alternativenmenge A .

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass das Logit Modell diese Eigenschaft besitzt:

$$\frac{P^{a_i}}{P^{a_j}} = \frac{e^{\mu \cdot V^{a_i}}}{\sum_{k=1}^n e^{\mu \cdot V^{a_k}}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n e^{\mu \cdot V^{a_k}}}{e^{\mu \cdot V^{a_j}}} = e^{\mu(V^{a_i} - V^{a_j})}.$$

Das Verhältnis der Auswahlwahrscheinlichkeiten der Alternativen a_i und a_j ist unabhängig von anderen Alternativen bzw. der Alternativenmenge.

Die Schwäche dieser Eigenschaft besteht darin, dass das Logit Modell für eine Menge von Alternativen, die untereinander teilweise stark korrelieren, nicht unbedingt sinnvolle Ergebnisse liefert.

Als Beispiel wird oft das "red bus-blue bus" Paradoxon erwähnt (Maier und Weiss [18]):

Beispiel 6.2. *Angenommen es stehen zwei Verkehrsmittelalternativen zur Verfügung (ein Auto (A) und ein roter Bus (R)), und die Auswahlwahrscheinlichkeiten der Alternativen seien gegeben durch*

$$P^A = 0,5 \quad P^R = 0,5.$$

Steht nun als dritte Alternative außerdem ein blauer Bus (B) zur Verfügung, der sich durch nichts als der Farbe vom roten Bus unterscheidet und

wird angenommen, dass die Auswahlwahrscheinlichkeit des blauen Busses so groß ist wie die des roten Busses, so ergeben sich mit dem Logit Modell die folgenden Auswahlwahrscheinlichkeiten

$$P^A = \frac{1}{3} \quad P^R = \frac{1}{3} \quad P^B = \frac{1}{3}.$$

Sinnvolle Wahrscheinlichkeiten für die Wahl der Alternativen wären jedoch

$$P^A = 0,5 \quad P^R = 0,25 \quad P^B = 0,25.$$

Allerdings ist in diesem Beispiel die Betrachtung zweier unterschiedlicher Busalternativen kaum gerechtfertigt, da sie keine Grundlage für eine Entscheidung zwischen den Bussen enthält. Alternativen, die sich (bzgl. des Nutzens) sehr ähnlich oder nahezu identisch sind, sollten daher zu einer Alternative zusammengefasst werden.

6.3 Anwendung auf das Fahrpreisplanungsmodell

In diesem Abschnitt geht es nun darum, eine Nachfragefunktion für das Fahrpreisplanungsmodell aus einem diskreten Entscheidungsmodell zu gewinnen, die variabel vom Preis abhängt. Dazu seien die Nutzenfunktionen für die Alternativen im Folgenden eine Funktion der Preisvariablen. Alle anderen die Nachfrage beeinflussenden Größen (wie Preis bzw. Kosten anderer Transportmittel oder Fahrzeit) werden als feste Parameter in die Nutzenfunktion integriert.

Zur Bestimmung der Nachfrage nach einer Alternative verwenden wir die Auswahlwahrscheinlichkeiten, wie sie in Gleichung (6.13) mit dem Logit Modell berechnet wurden.

Wir betrachten zunächst ein beliebiges OD-Paar (s, t) und mehrere Alternativen, von s nach t zu fahren, z. B. Monatsticket, Einzelticket und Auto. Um diese Alternativen eindeutig von den Reisealternativen unterscheiden zu können, bezeichnen wir sie als Verkehrsmittelalternativen. Sei $A_{st} := \{a_{st}^1, \dots, a_{st}^I\}$ die Menge der Verkehrsmittelalternativen für $(s, t) \in \mathcal{D}$.

Damit wir die Kosten der verschiedenen Verkehrsmittelalternativen vergleichen können, gehen wir davon aus, dass ein Passagier seinen Nutzen über einen bestimmten Zeitraum T betrachtet. Die Nutzenfunktion hängt davon ab, wie viele Fahrten der Passagier in diesem Zeitraum unternehmen will. Dabei wird davon ausgegangen, dass der Passagier sich über den gesamten Zeitraum bezogen auf das OD-Paar (s, t) für eine Verkehrsmittelalternative entscheidet und nicht zwischen ihnen wechselt.

Als Beispiel betrachte man die Alternativen Monatsticket, Einzelticket und Auto. Wir nehmen an, dass sich in diesem Fall ein Passagier überlegt,

wie oft er in einem Monat ($T = \text{ein Monat}$) fahren wird. Daraufhin entscheidet er, ob für diese Anzahl an Fahrten ein Einzelticket, ein Monatsticket oder das Auto günstiger ist.

Im Weiteren führen wir daher eine positive, diskrete Zufallsvariable Y_{st} ein. Sie steht für die Anzahl der Fahrten, die ein Passagier von s nach t im Zeitraum T unternimmt. Wir nehmen weiterhin an, dass $Y_{st} \in \{1, \dots, N_{st}\}$ ist, d. h. für jedes Paar (s, t) gibt es eine maximale Anzahl von Fahrten N_{st} .

Über den Zeitraum T werden die *Reisealternativen* und die Kosten bzw. die *Fahrpreisfunktionen* für jede Reisealternative definiert.

Für die Reisealternativen gilt

$$\mathcal{R}_{st} := \{a_1, \dots, a_I\} \times \{1, \dots, N_{st}\}$$

und $f_{st}^{a,k}(\mathbf{p})$ ist die Fahrpreisfunktion für Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ (bzw. für k Fahrten mit Verkehrsmittel $a \in A_{st}$).

Diese Wahl begründet sich dadurch, dass der Nutzen für einen Passagier nicht nur von der Verkehrsmittelalternative $a \in A_{st}$ abhängt, sondern auch von der Anzahl der Fahrten, die ein Passagier in dem Zeitraum T durchführt.

Die Nutzenfunktion für Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$U_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) = V_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) + \nu_{st}^a = -f_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) + \tilde{V}_{st}^{a,k} + \nu_{st}^a, \quad (6.15)$$

mit ν_{st}^a ist der Gumbel-verteilte Zufallsnutzen für Alternative a mit Parametern $(\eta = 0, \mu)$. Im deterministischen Nutzen \tilde{V}_{st}^a können weitere die Nachfrage beeinflussenden Faktoren berücksichtigt werden, z. B. die Fahrzeit. Diese Faktoren hängen ebenfalls von der Anzahl der Fahrten k ab, da z. B. die Fahrzeitunterschiede mit der Anzahl der Fahrten bedeutender werden.

Analog zum Logit Modell, siehe Gleichung (6.11) sowie Gleichung (6.13), können die Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, mit der ein Passagier eine bestimmte Alternative wählt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Passagier für k Fahrten von s nach t im Zeitraum T die Alternative $a \in A_{st}$ wählt, ist

$$P_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) := \mathbb{P}[U_{st}^a(\mathbf{p}) = \max_{b \in A} U_{st}^b(\mathbf{p}) \mid Y_{st} = k] = \frac{e^{\mu(V_{st}^{a,k}(\mathbf{p}))}}{\sum_{b \in A} e^{\mu(V_{st}^{b,k}(\mathbf{p}))}}$$

Wir nennen $P_{st}^{a,k}$ die Auswahlwahrscheinlichkeit für Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$.

Die Auswahlwahrscheinlichkeit für Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit, dass k Fahrten unternommen werden und multipliziert mit der Gesamtzahl der Passagiere o_{st}^g , die zwischen s und t

reisen, ergibt die Nachfragefunktion nach Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ für das OD-Paar (s, t) :

$$x_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) = o_{st}^g \cdot P_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k] = o_{st}^g \cdot \frac{e^{\mu(V_{st}^{a,k}(\mathbf{p}))}}{\sum_{b \in A_{st}} e^{\mu(V_{st}^{b,k}(\mathbf{p}))}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k].$$

Abhängig von den Preisvariablen können wir die erwartete Anzahl an Passagieren bestimmen, die auf OD-Paar (s, t) Alternative a wählen, indem wir die Nachfragefunktion nach Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ für das OD-Paar (s, t) über alle Fahrtenhäufigkeiten summieren:

$$Z_{st}^a(\mathbf{p}) := \sum_{k=0}^{N_{st}} x_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) = o_{st}^g \sum_{k=0}^{N_{st}} P_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k]. \quad (6.16)$$

Sei A'_{st} die Menge der Verkehrsmittelalternativen, die sich auf den öffentlichen Verkehr beziehen, d. h. die Menge A'_{st} beinhaltet die Alternativen, für die wir die Fahrpreise optimieren wollen.

Dann ergibt sich für unser *Fahrpreisplanungsproblem* (FPP):

$$\begin{aligned} \max \quad e(\mathbf{p}) &:= \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{(a,k) \in \mathcal{R}_{st} \\ a \in A'_{st}}} f_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) \cdot o_{st}^g \frac{e^{\mu(V_{st}^{a,k}(\mathbf{p}))}}{\sum_{b \in A_{st}} e^{\mu(V_{st}^{b,k}(\mathbf{p}))}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} \in P, \end{aligned} \quad (6.17)$$

wobei $e(\mathbf{p})$ in diesem Fall den erwarteten Einnahmen entspricht.

Sind die Fahrpreisfunktionen und Nutzenfunktionen stetig bzw. differenzierbar, so ist die Einnahmefunktion stetig bzw. differenzierbar.

Bemerkung 6.3. *Gilt $A'_{st} = A_{st}$, werden nur Verkehrsmittelalternativen betrachtet, für die wir den Fahrpreis optimieren wollen. Es gibt keine Alternative, deren Kosten konstant sind (bzw. deren Fahrpreisfunktion unabhängig von den Preisvariablen ist), auf die die Passagiere umsteigen können. In diesem Fall ist das Fahrpreisplanungsproblem für $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ i. A. unbeschränkt.*

Bemerkung 6.4. *Ohne den Zufallsnutzen bzw. den Störterm, d. h. für $\nu = 0$, ist die zu maximierende Funktion im Fahrpreisplanungsmodell (6.17) im Allgemeinen nicht stetig.*

Um dies beispielhaft zu verdeutlichen, betrachten wir ein OD-Paar (s, t) und eine Preisvariable p . Außerdem betrachten wir zwei Alternativen a und b . Der Nutzen der Alternativen über den Zeitraum T entspricht in diesem Beispiel den Kosten der Alternativen über den Zeitraum. Sei b die Alternative, für die wir den Fahrpreis bestimmen möchten. Die Kosten der Alternative b für T seien $f^{b,k}(p) = p \cdot k$. Die Kosten der Alternative a für T

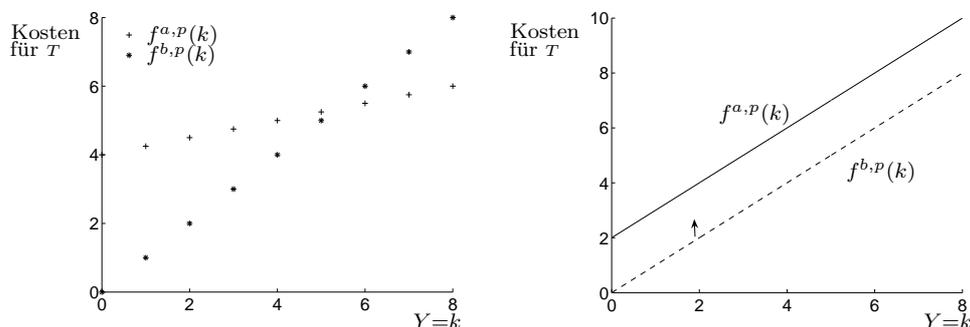


Abbildung 6.3: Links: Fahrpreisfunktionen der Alternativen a und b abhängig von einer diskreten Zufallsvariablen Y für eine feste Preisvariable p . Der Anstieg der Fahrpreisfunktion von Alternative b kann durch die Variation von p geändert werden. Rechts: Fahrpreisfunktionen der Alternativen a und b abhängig von einer stetigen Zufallsvariablen Y für eine feste Preisvariable p . Die Fahrpreisfunktion von Alternative b kann durch eine Änderung von p in Pfeilrichtung verschoben werden.

seien $f^{a,k}(p) = 4 + \frac{k}{4} \forall k$. In Abbildung 6.3 links sind die Fahrpreisfunktionen in Abhängigkeit von $Y = k$ für ein festes p dargestellt. Wir betrachten also $f^{a,p}(k)$ und $f^{b,p}(k)$. Da Y nur positive ganze Zahlen annimmt, sind diese Funktionen auch nur für diese Werte definiert.

Eine Änderung der Preisvariablen p wirkt sich für Alternative b durch eine Änderung des Anstiegs der Funktion $f^{b,p}(k)$ aus, $f^{a,p}(k)$ bleibt unverändert.

Nehmen wir an, ein Passagier wählt Alternative b , wenn die Kosten dieser Alternative kleiner oder gleich den Kosten der Alternative a sind, so würden in der Situation, die die Abbildung darstellt, alle Passagiere, die fünf oder weniger Fahrten durchführen, Alternative b wählen. Dies gilt immer noch, wenn der Fahrpreis für Alternative b so erhöht werden würde, bis die Kosten der beiden Alternativen bei fünf Fahrten gleich sind. Bei einer weiteren Preiserhöhung würden aber alle Passagiere, die fünf Fahrten unternehmen zur Alternative a wechseln und eine sprunghafte Änderung der Nachfrage und damit der Einnahmen wäre die Folge.

Eine stetige Zufallsvariable für die Anzahl der Fahrten würde diesen Effekt verhindern. Allerdings müssten dann zur Berechnung der Einnahmen Integrale gelöst werden. Ein weiterer Aspekt kann aber auch hiermit nicht verhindert werden: Wenn die Preisvariable so gewählt werden kann, dass $f^{a,p}(k) = f^{b,p}(k) \forall k$, dann ist die Einnahmefunktion für dieses p ebenfalls nicht stetig, da bei einer Erhöhung von p alle Passagiere zur Alternative a wechseln. Dies ist in Abbildung 6.3 rechts veranschaulicht.

Modell ohne Zufallsnutzen

Wir wollen hier das Fahrpreisplanungsproblem herleiten, wenn wir eine rein deterministische Nutzenfunktion wählen, d. h. wir betrachten für eine Rei-

sealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ und ein OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ die Nutzenfunktion

$$V_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) = -f_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) + \tilde{V}_{st}^{a,k}(\mathbf{p}).$$

Ein Passagier wählt nun bei k Fahrten Verkehrsmittelalternative a_{opt} mit

$$V_{st}^{a_{opt},k}(\mathbf{p}) = \max_{b \in A_{st}} V_{st}^{b,k}(\mathbf{p}).$$

Es muss darauf geachtet werden, dass sich ein Passagier bei mehreren Alternativen mit maximalen Nutzen nur für eine entscheidet.

Alle anderen Bezeichnungen und Definitionen bleiben unverändert.

Damit können wir für einen gegebenen Preisvariablenvektor die Alternative bestimmen, die alle Passagiere mit k Fahrten wählen. Für unser *Fahrpreisplanungsproblem* ergibt sich

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{(a,k) \in \mathcal{R}_{st} \\ a \in A'_{st}}} f_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) \cdot \mathbb{1}_{\{a\}}(a_{opt}) \cdot o_{st}^g \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k] \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{p} \in P. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Hierbei ist $\mathbb{1}_{\{a\}}$ die Indikatorfunktion für Verkehrsmittelalternative $a \in A'_{st}$. Sie ist eins, wenn die oben definierte Verkehrsmittelalternative a_{opt} für k Fahrten für a angenommen wird.

Die Maximumsbildung ist sehr aufwendig. Insbesondere, wenn viele Reisealternativen und Preisvariablen verwendet werden. In Kapitel 7 wird für ein Beispiel neben der Verwendung eines Zufallsnutzens eine Berechnung ohne Zufallsnutzen durchgeführt.

6.4 Diskussion

In diesem Modell stehen eine Menge von Alternativen zur Verfügung zwischen die sich ein Passagier entscheiden *muss*. Wenn es möglich sein soll, dass ein Verkehrsteilnehmer zu Hause bleiben kann, dann muss dies als eine Alternative zur Verfügung stehen. Im Folgenden werden einige weitere Aspekte kurz diskutiert:

- Die Betrachtungen der Auswahlwahrscheinlichkeiten der Reisealternativen wird getrennt für jedes OD-Paar durchgeführt. Das kann dazu führen, dass ein Passagier sich nach unseren Berechnungen z. B. für seine Fahrten auf (s, t) für eine Monatskarte entscheidet und für seine Fahrten auf (u, v) ein Einzelticket wählt.

Mit gekoppelten Entscheidungen über mehrere OD-Paare könnte dieses Problem beseitigt werden. Gleichzeitig würde es die Berechnungen komplexer gestalten, da mehr Informationen über die Passagiere

notwendig sind (z. B. auf welchen Strecken sie wie oft fahren und welche Rangreihenfolge die Strecken bezüglich der Alternativenwahl besitzen). Außerdem wären Entscheidungen, einige Fahrten mit dem Auto zu unternehmen und andere Fahrten mit der Bahn, durchaus sinnvoll und müssten bei den gekoppelten Entscheidungen berücksichtigt werden.

- Weiterhin ist die Zeitabhängigkeit der OD-Daten zu beachten. Die Daten können z. B. die Fahrten für einen ganzen Tag oder nur die Fahrten im Berufsverkehr beinhalten. Gibt es Unterschiede zwischen den einzelnen Wochentagen? Je nachdem wie die OD Daten beschaffen sind, müssen die Berechnungen interpretiert und ausgewertet werden.
- Mit der Wahl des Logit Modells und der Gumbelverteilung sind bereits einige Restriktionen gesetzt. Wie das “blue bus-red bus” Paradoxon (Beispiel 6.2) gezeigt hat, kann das Modell durch überflüssige Alternativen manipuliert werden. Es ist wichtig Alternativen zu wählen, die untereinander nicht stark korreliert sind, sondern stark korrelierende Alternativen zu einer Alternative zusammen zu fassen.
- Durch den Skalierungsparameter der Gumbelverteilung wird der Einfluss des Störterms festgelegt. Wir haben gesehen, dass ohne diesen Zufallsnutzen die Einnahmefunktion im Allgemeinen nicht stetig ist. Viele Optimierungsalgorithmen können nur angewendet werden, wenn die Zielfunktion stetig ist. Der Zufallsnutzen erleichtert die Berechnung des Fahrpreisplanungsproblems.

Insgesamt sind mit diesem Modell verschiedene und vielfältige Berechnungen möglich. Wenn möglichst viele Faktoren, die die Entscheidung des Passagiers beeinflussen, erfasst werden können und für diese eine gute mathematische Interpretation gelingt, ist eine sehr praxisnahe Modellierung möglich.

Kapitel 7

Berechnungen

In diesem Kapitel werden einige Beispiele mit dem Fahrpreisplanungsmodell berechnet. Zunächst wird in Abschnitt 7.1 die Herkunft der Daten beschrieben mit denen gerechnet wurde. In Abschnitt 7.2 werden Berechnungen unseres Fahrpreisplanungsmodells unter Verwendung von elementaren Funktionen zur Modellierung der Nachfragefunktion (Kapitel 5) vorgestellt und erläutert. In Abschnitt 7.3 erfolgt die Beschreibung und Durchführung von Berechnungen unseres Fahrpreisplanungsmodells unter Verwendung eines Entscheidungsmodells zur Modellierung der Nachfragefunktion (Kapitel 6).

7.1 Daten

Die Berechnungen wurden mit Daten für das niederländische Intercity-Netz sowie mit Daten für das Potsdamer Nahverkehrsnetz durchgeführt. Die Herkunft dieser Daten sowie die Vervollständigungen der Daten, die für Berechnungen notwendig waren, werden in den nächsten beiden Abschnitten erläutert.

Wir bezeichnen als *OD-Matrix für den OV* die Matrix, die für jedes OD-Paar die Anzahl der mit den Mitteln des öffentlichen Verkehrs (OV) reisenden Passagiere enthält. Analog dazu ist die *OD-Matrix für den IV* die Matrix, die für jedes OD-Paar die Anzahl der mit dem Individualverkehr (IV) bzw. mit dem privaten Auto reisenden Passagiere enthält. Die *OD-Matrix für den Gesamtverkehr* ist entsprechend definiert.

7.1.1 Daten Niederlande

Die OD-Matrix für den OV für einen Teil des niederländischen Intercity-Netzes ist einem öffentlich zugänglichem GAMS-Modell von Bussieck [10] entnommen. Dieses Netz besteht aus 23 Knoten (Stationen). Die (23×23) OD-Matrix hat 210 nichtnull Einträge. Wir nehmen an, dass die OD-Matrix für den Zeitraum eines Tages gilt.

Des Weiteren wurden die Fahrpreise, Abstände und Fahrzeiten (mit den wenigsten Umstiegen) für jedes dieser OD-Paare des Intercity-Netzes dem Internet entnommen [37]. Sie entsprechen dem Stand des Frühjahrs 2004. Mit diesen Daten ergibt sich eine Gesamtnachfrage von 91 791 Passagieren und Gesamteinnahmen von 860 991 € pro Tag.

Außerdem wurden Fahrzeiten und Längen für jedes OD-Paar mit dem Routenplaner Map24 [33] für eine Fahrt mit dem Auto berechnet. Als Start und Ziel wurden die Adressen der Stationen eingegeben und nach der schnellsten Route gesucht. Diese Daten werden für das Entscheidungsmodell benötigt.

7.1.2 Daten Potsdam

Die Daten für Potsdam wurden von der IVU Traffic Technologie AG im Rahmen eines Matheon Projekts zur strategischen Planung im öffentlichen Nahverkehr [32] zur Verfügung gestellt. Sie umfassen den Verkehr innerhalb von Potsdam und den Verkehr aus der Umgebung von und nach Potsdam. Zu Grunde liegen ein Netz für den öffentlichen Verkehr und ein Netz für den Individualverkehr. Für beide Netze gibt es getrennte Daten.

Das OV-Netz ist in 107 Bezirke unterteilt. Diese Bezirke entsprechen den OD-Knoten. Neben den Daten für die OD-Matrix sind Fahrzeiten (bzw. Geschwindigkeiten) und Längen für jede Kante des Netzes gegeben. Mit diesen Daten wurde die kürzeste Fahrzeit sowie die zugehörige Länge zwischen den OD-Knoten berechnet.

Das IV-Netz ist in 164 Bezirke unterteilt, die den OD-Knoten entsprechen. Auch hier sind neben den Daten für die OD-Matrix Höchstgeschwindigkeiten und Längen für jede Kante gegeben. Mit dem Dijkstra Algorithmus wurde für jedes OD-Paar die schnellste Route berechnet und für diese Route die Länge ermittelt. Die Fahrzeiten wurden bestimmt, indem angenommen wurde, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit 80% der Höchstgeschwindigkeit beträgt.

Insgesamt wurde für den OV und den IV jeweils eine OD-Matrix, eine Fahrzeit- und eine Abstands-Matrix bestimmt.

Ein Problem allerdings ist, dass OV- und IV-Netz nicht direkt zueinander passen, da z. B. das IV-Netz mehr OD-Knoten besitzt und außerdem OD-Knoten besitzt, die weit entfernt von einer Station liegen. Ich habe nun versucht, jedem OD-Knoten des OV-Netzes mindestens ein OD-Knoten des IV-Netzes zuzuordnen. Wurden mehrere IV-Knoten einem OV-Knoten zugeordnet, so wurden die OD-Daten der IV-Knoten aufaddiert und ein IV-Knoten gewählt, der die Fahrzeiten und Längen zu allen anderen Knoten bestimmt. Für die Knoten innerhalb von Potsdam und in direkter Umgebung war diese Zuordnung relativ eindeutig möglich. Die meisten Umlandknoten konnten allerdings wegen der oben genannten Probleme nicht berücksichtigt werden. Insgesamt wurden 101 der 164 OD-Knoten des IV-Netzes genau ei-

nem von 86 OD-Knoten des OV-Netzes zugeordnet. Am Ende entstanden OD-, Fahrzeit- und Abstands-Matrizen der Größe (86×86) für den OV und entsprechende Matrizen für den IV.

Außerdem wurden die 86 OD-Knoten des OV-Netzes nach dem Liniennetz von Potsdam den Zonen A, B und C zugeordnet. Damit konnte der Fahrpreis für jede Verbindung bestimmt werden. Diese Preise entsprechen dem Stand von Februar 2005. Sie können der Tabelle 2.2 entnommen werden.

Mit diesen (verringerten) Daten ergibt sich eine Gesamtnachfrage nach dem öffentlichem Verkehr von 66 503 Passagieren und Einnahmen in Höhe von 97 805 € pro Tag. Die entsprechende Nachfrage nach dem Individualverkehr beträgt 142 812 Passagiere pro Tag und ist damit etwa doppelt so groß wie die Gesamtnachfrage nach dem öffentlichen Verkehr.

7.2 Berechnungen mit elementaren Funktionen

In Kapitel 5 haben wir die Verwendung von Funktionen mit linearen, quadratischen und exponentiellen Verhalten als Modellnachfragefunktionen vorgestellt. In diesen Abschnitt werden wir einige Berechnungen des Fahrpreisplanungsmodells durchführen. Dazu müssen zunächst die Modellnachfragefunktionen für die Berechnungen skaliert werden. Diese Skalierung erfolgt durch die Festlegung von Parametern in den Abschnitten 7.2.1 und 7.2.2.

In dem Abschnitt 7.2.3 wird die Optimierung des Fahrpreisplanungsproblems mit Matlab erläutert.

Als Beispiel werden zwei Berechnungen mit den Daten von Potsdam durchgeführt. Dabei wird in dem einen Fall das gegebene Preissystem, ein Zonentarifsystem, optimiert und in dem anderen Fall ein optimaler Grund- und Kilometerpreis berechnet. Alle Ergebnisse werden mit den gegebenen Daten verglichen.

Mit den niederländischen Daten wird ebenfalls ein optimaler Grund- und Kilometerpreis berechnet und mit den gegebenen Daten verglichen. Wie in Abschnitt 2.2.1 gesehen, ist ein Grund- und Kilometerpreissystem ähnlich zu dem niederländischen Preissystem.

In Abschnitt 7.2.7 werden alle Ergebnisse zusammengefasst und diskutiert.

7.2.1 Parameter α und β

Die Parameter α_{st} und β_{st} für die Modellnachfragefunktionen, die in Abschnitt 5.2 vorgestellt wurden, können so gewählt werden, dass die Funktionen durch zwei vorgegebene Punkte verlaufen. Um den Bezug zu den existierenden Daten zu haben, wählen wir als einen Punkt den aktuell gültigen Preis $f_{st}(\mathbf{p}) = g_{st}$ und die OD-Nachfrage für den OV o_{st} für ein OD-Paar (s, t) , d. h. $\tilde{x}_{st}(g_{st}) = o_{st}$. Den zweiten Punkt legen wir noch nicht direkt fest,

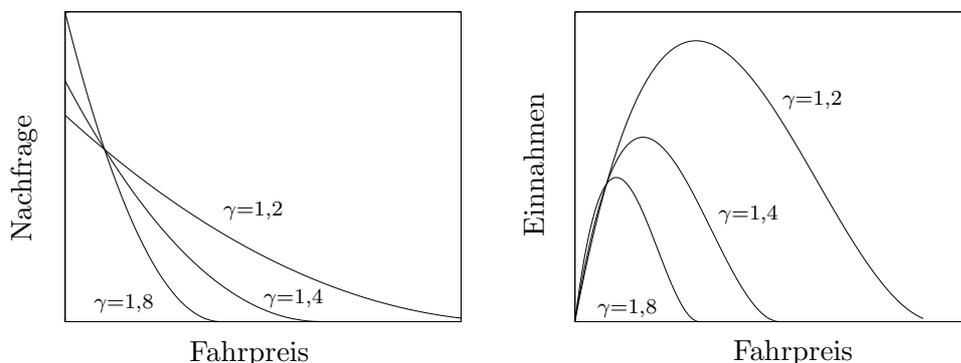


Abbildung 7.1: Quadratische Nachfragefunktion und entsprechende Einnahmefunktion für verschiedene Werte von γ .

sondern wir wählen für den zweiten Punkt den Nullpreis, $f_{st}(\mathbf{p}) = 0$ und eine Schätzung wie viel Prozent der Passagiere bezogen auf die OD-Nachfrage zum Nullpreis fahren würden, d. h. $\tilde{x}_{st}(0) = \gamma \cdot o_{st}$, mit $\gamma > 1$; $\gamma = 1,4$ z. B. bedeutet, zum Nullpreis würden gemessen an der OD-Nachfrage für den OV 140% fahren. Das Festlegen von γ erfolgt im Abschnitt 7.2.2.

Durch γ wird eine Art Sensitivität der Passagiere gegenüber dem Preis ausgedrückt, siehe dazu Abbildung 7.1 für die quadratische Nachfragefunktion. Je größer γ ist, desto größer ist der Betrag des negativen Anstiegs der Nachfragefunktion und desto kleiner ist damit die Toleranz gegenüber einer Preiserhöhung.

Es wurde bereits in Abschnitt 4.2.2 diskutiert, dass der Preis 0 eine besondere Rolle hat. Es ist anzunehmen, dass eine sehr realitätsnahe Nachfragefunktion am Nullpunkt eine Singularität besitzt. Zum Kalibrieren unserer Nachfragefunktionen wurde der Nullpreis gewählt, weil er anschaulich ist und damit leichter gerechnet werden kann. In unserem Fall setzen wir eine Nachfragefunktion am Punkt 0 stetig fort.

Lineare Nachfragefunktion

Wir setzen in die lineare Nachfragefunktion die Punkte $(0; \gamma \cdot o_{st})$ und $(g_{st}; o_{st})$ ein:

$$\begin{aligned} x_{st}(\mathbf{p}) &= \tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p})) &= -\alpha_{st} \cdot f_{st}(\mathbf{p}) + \beta_{st} \\ \tilde{x}_{st}(g_{st}) &= -\alpha_{st} \cdot g_{st} + \beta_{st} &= o_{st} \\ \tilde{x}_{st}(0) &= \beta_{st} &= \gamma \cdot o_{st}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für die Parameter die Werte:

$$\begin{aligned} \beta_{st} &= \gamma \cdot o_{st}, \\ \alpha_{st} &= -\frac{(1 - \gamma) \cdot o_{st}}{g_{st}}. \end{aligned}$$

Quadratische Nachfragefunktion

Wir betrachten die quadratische Nachfragefunktion und setzen die Punkte $(0; \gamma \cdot o_{st})$ und $(g_{st}; o_{st})$ ein:

$$\begin{aligned} x_{st}(\mathbf{p}) &= \tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p})) = \alpha_{st} \cdot (f_{st}(\mathbf{p}) - \beta_{st})^2 \\ \tilde{x}_{st}(g_{st}) &= \alpha_{st} \cdot (g_{st} - \beta_{st})^2 = o_{st} \\ \tilde{x}_{st}(0) &= \alpha_{st} \cdot (-\beta_{st})^2 = \gamma \cdot o_{st}. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich für die Parameter die Werte:

$$\begin{aligned} \alpha_{st} &= \frac{\gamma \cdot o_{st}}{\beta_{st}^2}, \\ \beta_{st} &= g_{st} \cdot \left(\frac{\gamma - \sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} \right) = g_{st} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} + 1} \\ \text{oder } \beta_{st} &= g_{st} \cdot \left(\frac{\gamma + \sqrt{\gamma}}{\gamma - 1} \right) = g_{st} \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} - 1}. \end{aligned}$$

Da $\beta_{st} > g_{st}$ gelten muss, damit der zur Zeit gültige Preis im Intervall $[0, \beta_{st}]$ liegt und $\gamma > 1$ ist, kann für β_{st} nur der zweite Wert gewählt werden.

Exponentielle Nachfragefunktion

Für die exponentielle Nachfragefunktion ergeben sich für die Werte der Parameter:

$$\begin{aligned} \alpha_{st} &= \gamma \cdot o_{st}, \\ \beta_{st} &= -\log\left(\frac{1}{\gamma}\right) \cdot \frac{1}{g_{st}}. \end{aligned}$$

7.2.2 Wahl von γ

Eine Idee ist, γ so zu wählen, dass die Preiselastizität der Nachfragefunktion \tilde{x}_{st} (siehe Definition 3.3) an dem aktuellen Punkt (g_{st}, o_{st}) einen bestimmten Wert annimmt:

$$\epsilon = \left. \frac{d\tilde{x}_{st}(f_{st}(\mathbf{p}))}{df_{st}(\mathbf{p})} \right|_{f_{st}(\mathbf{p})=g_{st}} \cdot \frac{g_{st}}{\tilde{x}_{st}(g_{st})}.$$

Es ist möglich, für jedes OD-Paar (s, t) eine andere Preiselastizität anzunehmen und damit γ_{st} abhängig vom OD Paar (s, t) zu erhalten. Darauf wird jedoch verzichtet, da keine Daten zur Verfügung stehen, mit denen ein solches Vorgehen ausreichend begründet werden kann.

Für die lineare Nachfragefunktion soll γ in Abhängigkeit von ϵ einmal exemplarisch bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\frac{(1-\gamma)o_{st}}{g_{st}}}{\frac{(1-\gamma)o_{st}}{g_{st}} \cdot g_{st} + \gamma \cdot o_{st}} \cdot g_{st} = \frac{1-\gamma}{(1-\gamma) + \gamma} \\ \Leftrightarrow \epsilon &= 1 - \gamma \\ \Leftrightarrow \gamma &= 1 - \epsilon.\end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich für alle drei Nachfragefunktionen folgende Beziehungen zwischen γ und der Preiselastizität ϵ :

$$\begin{aligned}\text{lineare Nachfragefunktion:} & \quad \gamma = 1 - \epsilon, \\ \text{quadratische Nachfragefunktion:} & \quad \gamma = \frac{(-\epsilon+2)^2}{4}, \\ \text{exponentielle Nachfragefunktion:} & \quad \gamma = \frac{1}{e^\epsilon}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Mit diesen Beziehungen können die Aussagen aus Abschnitt 7.2.1 über die Sensitivität der Passagiere gegenüber dem Preis veranschaulicht werden. Aus Abschnitt 3.3 wissen wir, je kleiner die Preiselastizität, desto größer die Nachfrageänderung gegenüber einer Preisänderung. Gleichung 7.1 zeigt, dass γ und ϵ negativ (linear, quadratisch, exponentiell) proportional zueinander sind.

Für den Preiselastizitätswert im ÖPNV von -0,3 (siehe Abschnitt 3.5.2) ergeben sich für alle drei Nachfragefunktionen folgende Werte für γ :

$$\begin{aligned}\text{lineare Nachfragefunktion:} & \quad \gamma = 1,3, \\ \text{quadratische Nachfragefunktion:} & \quad \gamma \approx 1,32, \\ \text{exponentielle Nachfragefunktion:} & \quad \gamma \approx 1,35.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Veranschaulicht heißt eine Preiselastizität von -0.3 am gegebenen Punkt, dass mit einer Modellierung mit der linearen Nachfragefunktion zum Preis Null 130% gegenüber der gegebenen Nachfrage fahren würden. Mit einer Modellierung mit der quadratischen Nachfragefunktion würden zum Nullpreis rund 132% gegenüber der gegebenen Nachfrage fahren, und mit einer Modellierung mit der exponentiellen Nachfragefunktion würden zum Nullpreis rund 135% gegenüber der gegebenen Nachfrage fahren.

7.2.3 Optimierung mit Matlab

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die Berechnungen unseres Fahrpreisplanungsmodells mit elementaren Funktionen mit Matlab [25] durchgeführt wurden. Zunächst erfolgt die Auflistung aller nötigen Daten.

Sei m die Anzahl der Stationen bzw. Haltestellen aus denen sich die OD-Paare zusammensetzen. Für die Berechnungen sind die folgenden Daten notwendig.

$$\begin{aligned}\text{OD-Matrix für den OV} & \quad o \in \mathbb{N}^{m \times m}, \\ \text{Preismatrix (beinhaltet gegebenen Preis)} & \quad g \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ \text{Abstandsmatrix für den OV} & \quad \ell \in \mathbb{R}^{m \times m},\end{aligned}$$

wobei die Abstandsmatrix für den OV nur wichtig ist, wenn ein entfernungsabhängiger Preis berechnet werden soll.

Die Idee ist nun die Einnahmefunktion für verschiedene Beispiele des Fahrpreisplanungsproblems in Matlab einzugeben, um dann mit numerischen Verfahren ein Optimum zu finden.

Für die in diesem Abschnitt folgenden Beispielrechnungen wurden daher folgende lokalen Parameter verwendet:

- γ (zur Skalierung der Nachfragefunktionen),
- Parameter für die Nachfragefunktion (linear, quadratisch, exponentiell),
- Parameter für das Preissystem (umgesetzt: Einheitspreis, Kilometerpreis, Grund- und Kilometerpreis).

Die letzten beiden Parameter legen fest, mit welcher Nachfragefunktion bzw. mit welchem Preissystem gerechnet werden soll. Alle lokalen Parameter können vor jeder Berechnung neu festgelegt werden. Das Zonentarifsystem für Potsdam wird in Abschnitt 7.2.4 behandelt.

Für die Berechnungen wurden die negativen Einnahmen betrachtet, d. h. das Maximierungsproblem wurde zu einem Minimierungsproblem umgewandelt. Dazu wurden drei Funktionen implementiert:

1. Funktion gibt (negativen) Wert der Einnahmefunktion an einer Stelle \mathbf{p}_0 zurück,
2. Funktion gibt (negativen) Wert des Gradientenvektors der Einnahmefunktion an einer Stelle \mathbf{p}_0 zurück,
3. Funktion gibt (negativen) Wert der Hessematrix der Einnahmefunktion an einer Stelle \mathbf{p}_0 zurück.

Es wurden mehrere Optimierungsalgorithmen verwendet.

Der einfachste Algorithmus ist das *Simplex Verfahren von Nelder-Mead*. Das Verfahren sucht ein Minimum der Einnahmefunktion (unter Verwendung der 1.Funktion) ohne Ableitungen zu berechnen. Beim Start des Verfahrens wird ein Simplex vorgegeben und die Ecke mit dem größten Funktionswert bestimmt. Danach wird durch bestimmte Konstruktionen ein neuer Punkt bestimmt, der einen kleineren Funktionswert besitzt, den alten Punkt ersetzt und ein neues Simplex aufbaut. Das Verfahren stoppt, wenn der Durchmesser des Simplex unter einer festgelegten Toleranz liegt (siehe z. B. in die Matlab Hilfe [25] oder für eine genauere Beschreibung des Algorithmus Alt [1]).

Eine zweite Methode ist die Nullstellenbestimmung des Gradienten (Verwendung der 2.Funktion) und die Auswertung der Hessematrix (Verwendung der 3.Funktion) für den berechneten Wert. In diesem Fall kann die Hessematrix mit übergeben werden, um die Berechnungen zu beschleunigen.

Eine dritte Möglichkeit ist ein Minimierungsalgorithmus für Funktionen mehrerer Veränderlicher ohne Nebenbedingungen, der ebenfalls von Matlab vorgegeben ist (Optimization Toolbox von Matlab [25]). In unserem Fall liegt eine Medium-Scale Optimierung vor. Die vom Algorithmus verwendeten Gradienten werden durch Funktionsauswertungen numerisch bestimmt, können aber auch übergeben werden. Der Algorithmus verwendet eine Quasi-Newton Methode mit einer gemischt quadratischen und kubischen Abstiegsmethode.

Alle Optimierungsverfahren berechneten für die folgenden Beispiele die gleichen Lösungen für verschiedene Startwerte. Die Hesse Matrix an den berechneten Stellen war stets positiv definit, d. h. es lag ein lokales Minimum vor, das bezogen auf das Ausgangsproblem ein lokales Maximum ist.

7.2.4 Beispiel Zonentarif Potsdam

Die gegebenen Daten von Potsdam umfassen zwei Tarifgebiete, vergleiche mit Tabelle 2.2:

Tarif 1: Eine Fahrt innerhalb von Verkehrsgebiet (oder Zone) AB oder BC kostet 1,40 €.

Tarif 2: Eine Fahrt innerhalb von Verkehrsgebiet (oder Zone) ABC kostet 2,20 €.

In diesem Abschnitt sollen diese Preise mit der linearen, quadratischen und exponentiellen Nachfragefunktion optimiert werden. Die Preisvariablen sind p_1 für Tarif 1 und p_2 für Tarif 2.

Wir zerlegen die Menge \mathcal{D} der OD-Paare in zwei disjunkte Mengen \mathcal{D}_1 und \mathcal{D}_2 , so dass in \mathcal{D}_i die OD-Paare enthalten sind, die in Tarifgebiet i liegen, $i = 1, 2$. Formal ausgedrückt bedeutet es:

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \text{ mit } (s, t) \in \mathcal{D}_i \Leftrightarrow g_{st} = \text{Tarif } i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Für die Fahrpreisfunktion gilt

$$f_{st}(p_1, p_2) = \begin{cases} p_1 & \text{für } (s, t) \in \mathcal{D}_1 \\ p_2 & \text{für } (s, t) \in \mathcal{D}_2 \end{cases}$$

Wir nehmen an, es gibt keine Restriktionen zwischen den Preisvariablen. Das Optimierungsproblem zerfällt dann in zwei unabhängige Teilprobleme (i ist 1 oder 2):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}_i} p_i \cdot x_{st}(p_i) \\ \text{s.t.} \quad & p_i \geq 0 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Die Optimierung des 1. Tarifs kann unabhängig von der Optimierung des zweiten Tarifs erfolgen.

Für diesen Fall betrachten wir im Folgenden die Optimierung für ein Tarifgebiet. Sei zunächst $i \in \{1, 2\}$ und $|\mathcal{D}_i| = 1$, d. h. wir betrachten nur ein (s, t) Paar.

Sei außerdem

$$\mathcal{E}_{st}(p) = \frac{(x_{st}(p))'}{x_{st}(p)} \cdot p$$

die Funktion der Preiselastizität (abhängig von der Preisvariablen).

Wähle $\hat{p} := \inf\{p \mid x_{st}(p) = 0\}$. Hierbei definieren wir $\inf\{\emptyset\} := \infty$.

Für alle drei betrachteten Nachfragefunktionen gilt, dass die Funktion der Preiselastizität für alle $0 \leq p < \hat{p}$ eine negative, streng monoton fallende Funktion ist. Die Negativität folgt aus der strengen Monotonie von $x_{st}(p)$ auf dem betrachteten Bereich und die strenge Monotonie der Preiselastizitätsfunktion folgt aus den folgenden Betrachtungen:

- lineare Nachfragefunktion

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{st}(p) &= \frac{-\alpha_{st} \cdot p}{-\alpha_{st} \cdot p + \beta_{st}} \\ (\mathcal{E}_{st}(p))' &= \frac{-\alpha_{st} \cdot (-\alpha_{st} \cdot p + \beta_{st}) - \alpha_{st}^2 \cdot p}{(-\alpha_{st} \cdot p + \beta_{st})^2} = \frac{-\alpha_{st} \cdot \beta_{st}}{(-\alpha_{st} \cdot p + \beta_{st})^2} < 0,\end{aligned}$$

- quadratische Nachfragefunktion

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{st}(p) &= \frac{2 \cdot \alpha_{st}(p - \beta_{st}) \cdot p}{\alpha_{st}(p - \beta_{st})^2} = \frac{2 \cdot p}{(p - \beta_{st})} \\ (\mathcal{E}_{st}(p))' &= \frac{2}{p - \beta_{st}} - \frac{2 \cdot p}{(p - \beta_{st})^2} = \frac{-2 \cdot \beta_{st}}{(p - \beta_{st})^2} < 0,\end{aligned}$$

- exponentielle Nachfragefunktion

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{st}(p) &= \frac{-\alpha_{st} \cdot \beta_{st} \cdot e^{-\beta_{st} \cdot p}}{\alpha_{st} \cdot e^{-\beta_{st} \cdot p}} \cdot p = -\beta_{st} \cdot p \\ (\mathcal{E}_{st}(p))' &= -\beta_{st} < 0.\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum von $e_{st}(p) = x_{st}(p) \cdot p$ ist (vergleiche auch mit Gleichung (3.13))

$$(e_{st}(p))' = p \cdot (x_{st}(p))' + x_{st}(p) = \mathcal{E}_{st}(p) \cdot x_{st}(p) + x_{st}(p) = (\mathcal{E}_{st}(p) + 1)x_{st}(p) = 0.$$

Aus $x_{st}(p) > 0$ und $\mathcal{E}_{st}(p)$ streng monoton fallend folgt, dass p_0 mit $\mathcal{E}_{st}(p_0) = -1$ einziger kritischer Punkt in $[0, \hat{p})$ ist.

Da die Preiselastizitätsfunktion streng monoton fallend und negativ und die Nachfragefunktion positiv ist, ist

$$(e_{st}(p_0 - h))' > 0 \quad \text{und} \quad (e_{st}(p_0 + h))' < 0 \quad \text{für } h > 0.$$

Damit ist p_0 ein lokales Maximum für $e_{st}(p)$. Aus $e_{st}(p) = 0$ für $p = 0$ und für alle $p \geq \hat{p}$ (bzw. $e_{st}(p) \xrightarrow[p \rightarrow \hat{p}]{} 0$, falls $\hat{p} = \infty$) folgt, dass p_0 sogar ein globales Maximum für die Einnahmefunktion $e_{st}(p)$ ist.

Die Funktion der Preiselastizität für die drei Nachfragefunktionen ist unabhängig von dem OD-Paar (s, t) , wenn γ und g_{st} unabhängig vom Paar (s, t) sind.

Der Parameter γ bzw. der gegebene Preis g sind in unserem Fall für alle OD-Paare gleich. Um den optimalen Preis für das Problem (7.3) zu bestimmen, reicht es daher, für die jeweilige Nachfragefunktion die Gleichung $\mathcal{E}(p) = -1$ zu lösen. Für die Nachfragefunktionen ergeben sich dann als optimale Preise:

- lineare Nachfragefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(p) &= \frac{-\alpha_{st} \cdot p}{-\alpha_{st} \cdot p + \beta_{st}} = \frac{(1 - \gamma) \cdot p}{(1 - \gamma) \cdot p + \gamma \cdot g} = -1 \\ \Leftrightarrow \quad p &= \frac{-\gamma \cdot g}{2(1 - \gamma)} \end{aligned}$$

- quadratische Nachfragefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(p) &= \frac{2 \cdot p}{p - \beta_{st}} = \frac{2 \cdot p}{p - g \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma}-1}} = -1 \\ \Leftrightarrow \quad p &= g \cdot \frac{\sqrt{\gamma}}{3(\sqrt{\gamma}-1)} \end{aligned}$$

- exponentielle Nachfragefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(p) &= -\beta_{st} \cdot p = \log \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{g} \cdot p = -1 \\ \Leftrightarrow \quad p &= -\frac{1}{\log \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{g}} \end{aligned}$$

Für die Werte von γ aus Abschnitt 7.2.2, Gleichung (7.2) sind die Optimalwerte, Gesamteinnahmen e und Gesamtnachfragen x für die jeweiligen Nachfragefunktionen in Tabelle 7.1 dargestellt.

Tabelle 7.1: Optimalwerte für Tarif 1 und 2. Die gegebenen Werte: Im Tarif 1 (1,40 €) fahren 60627 Passagiere, die Einnahmen betragen 84877,80 €; im Tarif 2 (2,20 €) fahren 5876 Passagiere, die Einnahmen betragen 12927,20 €.

		Tarif 1			Tarif 2		
		p_1	e	x	p_2	e	x
linear	$\gamma = 1,3$	3,03	119 536,2	39 408,0	4,77	18 205,8	3819,4
quadr.	$\gamma = 1,32$	3,60	128 061,9	35 569,9	5,66	19 504,3	3447,3
expon.	$\gamma = 1,35$	4,67	140 461,8	30 109,6	7,33	21 393,0	2918,3

Für alle drei Funktionen sind die berechneten Preise sehr viel größer als die gegebenen Preise. Mit der linearen Nachfragefunktion haben sich die

Preise mehr als verdoppelt mit der quadratischen Nachfragefunktion fast verdreifacht und mit der Exponentialfunktion mehr als verdreifacht. Die Nachfragemengen sind entsprechend um ein Drittel bzw. die Hälfte zurückgegangen.

Bemerkung 7.1. *Die gegebenen Preise sowie Gesamteinnahmen und Nachfragemengen sind optimal für Werte von $\gamma = 2,0$ für die lineare Nachfragefunktion, von $\gamma = 2,25$ für die quadratische Nachfragefunktion und von $\gamma = e^1 \approx 2,72$ für die exponentielle Nachfragefunktion. (Dies entspricht einer Preiselastizität von -1 .)*

7.2.5 Beispiel Grund-, Kilometerpreis Potsdam

Für die Berechnungen wählen wir die Preisvariablen p_G , einen Grundpreis, der bei jeder Fahrt mit den öffentlichen Verkehrsmitteln gezahlt werden muss und p_k , einen Kilometerpreis, der pro Reisekilometer gezahlt werden muss. Die Fahrpreisfunktion setzt sich dann folgendermaßen zusammen:

$$f_{st}(p_G, p_k) = p_G + \ell_{st} \cdot p_k,$$

wobei ℓ_{st} der kürzeste Abstand in Kilometern (bzgl. des OV-Netz) zwischen dem OD Paar (s, t) ist. Damit ergibt sich folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} x_{st}(p_G, p_k) \cdot (p_G + \ell_{st} \cdot p_k) \\ \text{s.t.} \quad & p_G, p_k \geq 0. \end{aligned}$$

In Tabelle 7.2.5 sind die optimalen Werte für die Preisvariablen bezüglich der linearen, quadratischen und exponentiellen Nachfragefunktion dargestellt. Um die gegebenen Preise mit den optimalen Preisen vergleichen zu können, ohne sich alle OD Paare anschauen zu müssen, wurden vier OD-Paare folgendermaßen ausgewählt:

$$\begin{aligned} (u_1, v_1) : \quad & \ell_{u_1 v_1} = \min_{(s,t) \in \mathcal{D}} \{ \ell_{st} \mid g_{st} = 1.45 \wedge o_{st} > 0 \} \approx 0 \text{ km}, \\ (\tilde{u}_1, \tilde{v}_1) : \quad & \ell_{\tilde{u}_1 \tilde{v}_1} = \max_{(s,t) \in \mathcal{D}} \{ \ell_{st} \mid g_{st} = 1.45 \wedge o_{st} > 0 \} \approx 31,6 \text{ km}, \\ (u_2, v_2) : \quad & \ell_{u_2 v_2} = \min_{(s,t) \in \mathcal{D}} \{ \ell_{st} \mid g_{st} = 2.20 \wedge o_{st} > 0 \} \approx 3,6 \text{ km}, \\ (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2) : \quad & \ell_{\tilde{u}_2 \tilde{v}_2} = \max_{(s,t) \in \mathcal{D}} \{ \ell_{st} \mid g_{st} = 2.20 \wedge o_{st} > 0 \} \approx 24,6 \text{ km}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

D. h. für jedes Tarifgebiet betrachten wir das OD-Paar mit dem kleinsten berechneten Preis und das OD-Paar mit dem größten berechneten Preis auf dem Passagiere fahren.

Es wurden zwei Berechnungen pro Nachfragefunktion durchgeführt. Bei der ersten Berechnung wurden die Nachfragefunktionen so skaliert, dass die Preiselastizität am gegebenen Preis -0.3 beträgt (2., 4. und 6. Spalte der Tabelle). Bei der zweiten Berechnung wurden die Nachfragefunktionen so skaliert, dass die Preiselastizität am gegebenen Preis -1 beträgt (3., 5. und 7. Spalte).

	linear		quadratisch		exponentiell		zur Zeit
	$\gamma = 1,3$	2	1,32	2,25	1,35	2,72	
p_G	2,92	1,35	3,45	1,34	4,44	1,33	
p_k	0,042	0,019	0,058	0,023	0,088	0,026	
e	135 812,9	96 435,2	145 913,4	96 709,6	160 567,8	97 026,9	100 836,35
x	43 227,0	66 501,9	38 909,6	66 322,2	32 824,3	66 134,3	66 503
$f_{u_1 v_1}$	2,92	1,35	3,45	1,34	4,44	1,33	1,40
$x_{u_1 v_1}$	6,1	9,3	5,5	9,4	4,7	9,4	9
$f_{\tilde{u}_1 \tilde{v}_1}$	4,26	1,96	5,29	2,06	7,21	2,16	1,40
$x_{\tilde{u}_1 \tilde{v}_1}$	0,4	0,6	0,3	0,6	0,3	0,6	1
$f_{u_2 v_2}$	3,08	1,42	3,66	1,42	4,76	1,43	2,20
$x_{u_2 v_2}$	38,7	59,6	35,7	60,9	31,0	62,5	44
$f_{\tilde{u}_2 \tilde{v}_2}$	3,96	1,83	4,88	1,90	6,60	1,98	2,20
$x_{\tilde{u}_2 \tilde{v}_2}$	9,9	15,2	8,7	14,8	7,1	14,4	13

Tabelle 7.2: Optimale Grund- und Kilometerpreise für Potsdam bzgl. der drei Modellnachfragefunktionen. Dabei wurde γ so gewählt, dass die Preiselastizität am aktuellen Preis $-0,3$ (erste Spalte pro Nachfragefunktion) und -1 (zweite Spalte pro Nachfragefunktion) beträgt. Die letzte Spalte enthält die gegebenen Werte. Dabei beziehen sich die Einnahmen e und die Nachfrage x auf alle (s, t) Paare, unabhängig in welchem Tarifgebiet sie liegen. Die letzten acht Zeilen enthalten die Fahrpreise und Nachfragen für vier ausgewählte OD-Paare, siehe Gleichung (7.4).

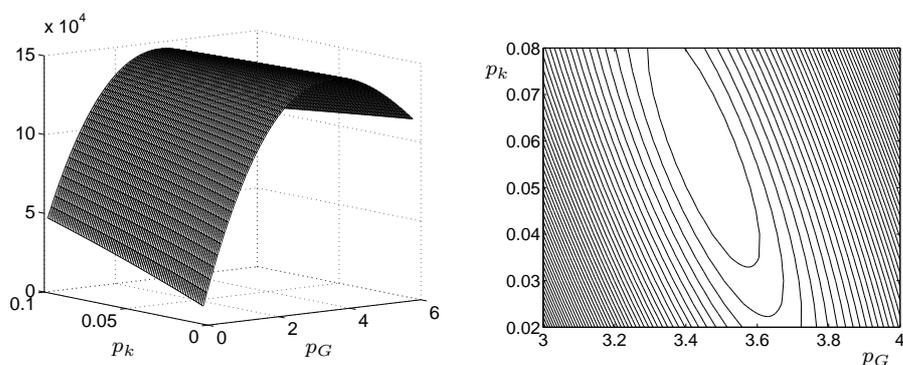


Abbildung 7.2: Links: Einnahmefunktion für die quadratische Nachfragefunktion und $\gamma=1,32$. Der Optimalwert ist bei $p_G \approx 3,45$ und $p_k \approx 0,058$. Rechts: Konturplot der Einnahmefunktion

Die Ergebnisse können wie folgt zusammengefasst werden:

- $\epsilon = -0,3$: Je nach Nachfragefunktion steigen die Einnahmen um 35% (lineare Nachfragefunktion) bzw. um 60% (exponentielle Nachfragefunktion), wobei die Nachfragen um 35%-50% sinken. Die berechneten

Preise liegen deutlich über den gegebenen Preisen (bis zu 200% für die lineare Nachfragefunktion und bis zu 400% für die exponentielle Nachfragefunktion).

- $\epsilon = -1$: Das Ausgangsniveau von Einnahmen und Ausgaben wird ungefähr erreicht. Die Preise im Tarifgebiet 2 liegen stets unter dem gegebenen Preis (10%-35%). Die Preise im Tarifgebiet 1 liegen je nach Nachfragefunktion teilweise bis 40% bzw. bis 50% über dem gegebenen Preis.

Als Beispiel ist in Abbildung 7.2 die Einnahmefunktion für die quadratische Nachfragefunktion und $\gamma = 1.32$ dargestellt.

7.2.6 Beispiel Grund-, Kilometerpreis Niederlande

Analog zu Abschnitt 7.2.5 wollen wir auch für die niederländischen Daten einen optimalen Grund- und Kilometerpreis berechnen. Wir betrachten dazu wieder die Preisvariablen p_G und p_k und die Fahrpreisfunktion

$$f_{st}(p_G, p_k) = p_G + \ell_{st} \cdot p_k.$$

Für die Werte von γ aus Abschnitt 7.2.2, Gleichung (7.2) ergeben sich die folgenden Optimalwerte, Gesamteinnahmen e und Gesamtnachfragen x für die drei Nachfragefunktionen:

		p_G	p_k	e	x
linear	$\gamma = 1,3$	2,28	0,26	1211086,6 (+41%)	59664,3 (-35%)
quadratisch	$\gamma = 1,32$	2,74	0,31	1297851,9 (+51%)	53817,6 (-41%)
exponentiell	$\gamma = 1,35$	3,60	0,40	1423953,6 (+65%)	45524,1 (-50%)

In Klammern stehen die prozentualen Veränderungen gegenüber den gegebenen Werten.

Im Folgenden werden detailliertere Berechnungen nur für den Fall der quadratischen Nachfragefunktion vorgestellt:

Die Einnahmefunktion für $\gamma = 1,32$ ist in Abbildung 7.3 zu sehen. Des weiteren wurden die Preise und die Nachfragen für einige OD-Paare ermittelt. Diese Ergebnisse sind in Tabelle 7.3 dargestellt. Man kann sehen, dass sich die Fahrpreise mehr als verdoppelt bis fast verdreifacht haben, während sich die Nachfrage fast halbiert hat

Außerdem enthält diese Tabelle die Fahrpreise und Gesamtnachfragen, wenn der Grundpreis auf Null gesetzt wird und nur ein Kilometerpreis zu zahlen ist. Der optimale Kilometerpreis beträgt in diesem Fall knapp 0,35 €. Bei einer Fixierung des Kilometerpreises auf Null, ergibt sich ein optimaler einheitlicher Preis von 24,28 € für alle Strecken.

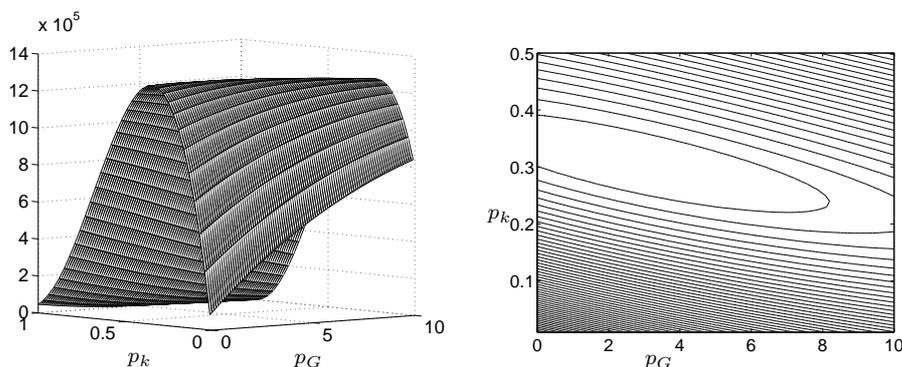


Abbildung 7.3: Links: Einnahmefunktion für die quadratische Nachfragefunktion und $\gamma = 1,32$. Der Optimalwert ist bei $p_G \approx 2,74$ und $p_k \approx 0,31$. Rechts: Konturplot der Einnahmefunktion.

Tabelle 7.3: Vergleich der optimierten Preise mit den tatsächlichen Preisen für einige OD Paare und $\gamma = 1,32$. Die aktuellen Preise sind g_{st} , die aktuelle Nachfrage o_{st}^B ; ℓ_{st}^B ist der Abstand eines OD Paares in Kilometer.

ℓ_{st}	o_{st}^B	g_{st}	x_{st}	f_{st}	$p_G = 0$		$p_k = 0$	
					x_{st}	f_{st}	x_{st}	f_{st}
11	1456	2,1	744,1	6,12	1126,6	3,80	478,0	24,28
35	5826	5,2	3386,4	13,50	3755,6	12,08	1198,4	24,28
50	1829	7,1	1082,0	18,11	1132,5	17,26	748,3	24,28
106	720	14,0	430,5	35,32	415,5	36,59	571,1	24,28
150	24	19,2	14,2	48,84	13,4	51,79	22,1	24,28
202	77	24,1	43,1	64,82	39,7	69,74	76,8	24,28
250	1	28,5	0,5	79,57	0,5	86,31	1,0	24,28
303	14	33,3	7,3	95,86	6,5	104,61	15,2	24,28

Tabelle 7.4: Ergebnisse für die Optimierung mit verschiedenen Werten von γ bzw. ϵ ; x ist die Gesamtnachfrage und e die Gesamteinnahmen. Fettgedruckt sind die Werte, die den aktuellen Werten am Nächsten sind.

γ	ϵ	p_b	p_d	x	e
1,2	-0,19	4,08	0,46	48 925	1 755 148
1,32	-0,3	2,74	0,31	53 818	1 297 852
1,4	-0,37	2,29	0,26	57 079	1 152 190
1,6	-0,53	1,7	0,19	65 233	973 588
1,7	-0,61	1,52	0,17	69 311	929 658
1,8	-0,68	1,39	0,16	73 388	900 812
1,9	-0,76	1,29	0,15	77 465	882 001
2	-0,83	1,21	0,13	81 541	870 194
2,2	-0,97	1,09	0,12	89 696	860 532
2,25	-1	1,07	0,12	91 735	860 200

In Tabelle 7.4 sind Optimalpreise, Einnahmen und Gesamtnachfragen für verschiedene γ -Werte (bzw. für verschiedene Preiselastizitäten der quadratischen Nachfragefunktion am gegebenen Preis) aufgelistet.

Die Gesamteinnahmen nehmen ab und die Gesamtnachfrage nimmt zu, je größer die Preiselastizität der Nachfragefunktion am gegebenen Preis gewählt wird. Erst bei einer Preiselastizität der Nachfragefunktion am gegebenen Preis um -1 werden in etwa die Ausgangswerte von Einnahmen und Nachfrage erreicht.

7.2.7 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt haben wir drei Beispiele unseres Fahrpreisplanungsproblems unter Verwendung von elementaren Funktionen zur Modellierung der Nachfrage betrachtet. Wir verwendeten lineare, quadratische und exponentielle Funktionen als Nachfragefunktionen. Dabei haben wir die Nachfragefunktionen für jedes OD-Paar (s, t) so skaliert, dass sie die Punkte $(g_{st}; o_{st})$ (gegebener Preis; gegebene Nachfrage) und $(0; \gamma \cdot o_{st})$ enthalten, wobei der zweite Punkt und der Parameter γ vorwiegend zur Veranschaulichung verwendet wurden. Der Parameter γ wurde über die Preiselastizität am gegebenen Punkt festgelegt. Die Beziehung zwischen γ und der Preiselastizität ϵ wurde in Abschnitt 7.2.2 hergeleitet. Eine Änderung der Preiselastizität bzw. eine Änderung von γ drückt eine Änderung der Preissensitivität der Passagiere gegenüber einer Preisänderung aus.

Folgende Berechnungen haben wir durchgeführt:

1. optimale Preise für das gegebene Zonensystem in Potsdam,
2. einen Grund- und Kilometerpreis für Potsdam,
3. einen Grund- und Kilometerpreis für die Niederlande.

Im ersten Fall haben wir gesehen, wenn die Zonenpreise unabhängig voneinander sind und alle Nachfragefunktionen am gegebenen Punkt für jedes OD-Paar mit der gleichen Preiselastizität skaliert werden, dass eine Berechnung des optimalen Preises unabhängig von den OD-Paaren ist. In diesem Fall kann der optimale Preis durch eine Formel sofort bestimmt werden.

In allen Berechnungen hat sich folgendes gezeigt:

- Werden die Nachfragefunktionen mit einer Preiselastizität von -0,3 am gegebenen Punkt skaliert, so werden mit den optimal berechneten Fahrpreisen ein deutlicher Einnahmewachstum um +50% und gleichzeitig ein Nachfragerückgang um etwa -40% erzielt.
- Eine Skalierung der Nachfragefunktionen mit einer Preiselastizität von -1 am gegebenen Punkt führt zu einer Gesamtnachfrage und Gesamteinnahmen etwa in der Höhe der gegebenen Werte für den optimal berechneten Preis.

Anschaulich zeigen die Berechnungen, dass durch die Wahl der Nachfragefunktion die Abhängigkeit der Passagiere von einem (einzigem) Ticketpreis modelliert wird. Wie stark die Abhängigkeit ist, wird durch die Festlegung von γ bzw. ϵ ausgedrückt. Ein Wert von $\epsilon \in (-1, 0)$ heißt anschaulich, eine ein-prozentige Preiserhöhung bewirkt einen weniger als ein-prozentigen Nachfragerückgang. In der VWL-Literatur wird in diesem Fall auch von einer unelastischen Nachfrage gesprochen. In diesem Fall führt eine durchschnittliche Preiserhöhung meistens zu einer Erhöhung der Einnahmen. Für $\epsilon < -1$ ist die Nachfrage elastisch, d. h. eine ein-prozentige Preiserhöhung bewirkt einen mehr als ein-prozentigen Nachfragerückgang. Eine durchschnittliche Preiserhöhung würde daher eher zu Einnahmenverlusten führen. Die Form der Abhängigkeit von Nachfragemenge und Ticketpreis wird durch die Wahl der Nachfragefunktion als eine lineare, quadratische oder exponentielle Funktion ausgedrückt.

Diese Modellierung beinhaltet keine alternativen Möglichkeiten (wie Auto oder andere Ticketarten) für eine Fahrt durch ein Verkehrsgebiet. Sie ist damit insgesamt recht grob. Die Annahme, dass die Nachfrage exponentiell oder linear abnimmt und die Preiselastizität am gegebenen Preis etwa ϵ ist, reichen nicht aus, um konkrete und begründbare Angaben über die Preisgestaltung zu treffen.

Dennoch konnten wir an diesen Beispielen sehen, dass eine Lösung ohne rechnerische Schwierigkeiten möglich ist. Wir können damit die Nachfragefunktion komplexer gestalten, indem wir andere Alternativen und Faktoren wie Fahrzeit in die Betrachtungen einbeziehen.

7.3 Berechnungen Entscheidungsmodell

In diesem Abschnitt werden Berechnungen unseres Fahrpreisplanungsmodells aus Abschnitt 6.3 durchgeführt. Wir betrachten für verschiedene Reisealternativen eine Nutzenfunktion, die sich aus Fahrpreis und Fahrzeit der Reisealternative zusammensetzt. Diese geht in ein Entscheidungsmodell ein, welches eine Nachfragefunktion liefert.

In Abschnitt 7.3.1 wird die Umsetzung in Matlab beschrieben sowie einige Festlegungen bzw. Vorbereitungen getroffen: Die fixen und variablen Autokosten und die monatliche Fahrtenhäufigkeit werden bestimmt. Außerdem wird die OD-Matrix des Bahnverkehrs für die Niederlande auf den Gesamtverkehr (Auto- und Bahnverkehr) hoch-gerechnet.

Als Beispiel wird in Abschnitt 7.3.3 für die Niederlande eine Preisberechnung für ein Standardticket und ein Bahnkartenticket für Vielfahrer durchgeführt. Für Potsdam erfolgt in Abschnitt 7.3.4 eine Berechnung für ein Einzelticket und ein Monatsticket. Dabei führen wir zum Vergleich auch eine Berechnung durch, bei der wir auf den Zufallsnutzen verzichten.

In den Berechnungen sind die Verkehrsmittelalternativen und die Reise-

alternativen für jedes OD-Paar gleich. Deshalb wird für eine bessere Lesbarkeit meistens auf die Indizierung nach dem OD-Paar verzichtet.

7.3.1 Daten und Parameter

Sei m die Anzahl der Stationen bzw. Haltestellen. Für Berechnungen mit dem Entscheidungsmodell sind die folgenden Daten notwendig:

OD-Matrix für den Gesamtverkehr	$o^g \in \mathbb{N}^{m \times m}$
Abstandsmatrix des IV-Netzes	$\ell^A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
Abstandsmatrix des OV-Netzes	$\ell^B \in \mathbb{R}^{m \times m}$
Fahrzeitmatrix des IV-Netzes	$t^A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
Fahrzeitmatrix des OV-Netzes	$t^B \in \mathbb{R}^{m \times m}$
Wahrscheinlichkeitsverteilungsvektor der ZV Y_{st}	$v \in \mathbb{R}^{N_{st}}$

Weitere Parameter sind

- q_F und q_V , fixe und variable Autokosten,
- μ , Skalierungsparameter der Gumbel-verteilten Störterme ν ,
- δ_1 und δ_2 , Gewichtungparameter für Fahrpreis und Fahrzeit in der Nutzenfunktion.

Die Abstands-Matrizen und die Fahrzeit-Matrizen sind für Potsdam und für die Niederlande gegeben, siehe Abschnitt 7.1. Die OD-Matrix des gesamten Verkehrs für Potsdam ist ebenfalls gegeben.

Für die Niederlande wird diese OD-Matrix weiter unten bestimmt.

Außerdem erfolgt die Festlegung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Fahrtenhäufigkeit sowie die Herleitung der fixen und variablen Autokosten. Die Parameter μ , δ_1 und δ_2 werden in den jeweiligen Berechnungen zu Potsdam und den Niederlanden festgelegt.

Fahrtenhäufigkeit

Wir besitzen keine Daten über die Verteilung der Fahrtenhäufigkeit im Monat für die einzelnen OD-Paare. Daher wählen wir für jedes OD-Paar eine gleiche symmetrische Verteilung, die wir aus einer Parabelfunktion herleiten. Sei $N_{st} = 60$ für alle $(s, t) \in \mathcal{D}$, d. h. die Zufallsvariable Y_{st} nehme Werte zwischen 1 und 60 an mit folgender positiven Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[Y_{st} = k] = \frac{-\frac{1}{1500} \cdot (k - 30)^2 + 1}{\sum_{k=1}^{60} \left(-\frac{1}{1500} \cdot (k - 30)^2 + 1 \right)} \quad \text{für } k = 1, \dots, 60. \quad (7.5)$$

In Abbildung 7.4 ist diese Wahrscheinlichkeitsverteilung graphisch dargestellt.

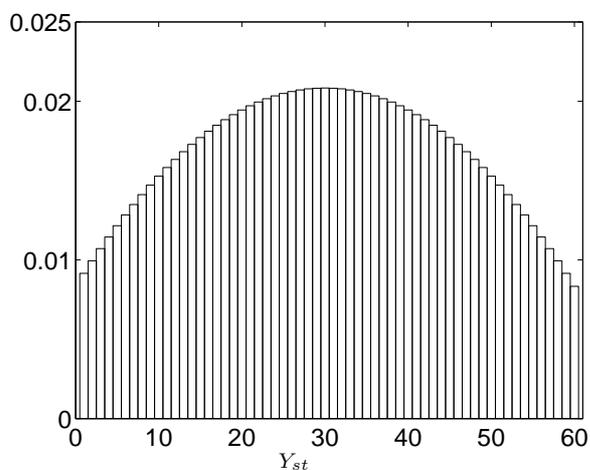


Abbildung 7.4: Wahrscheinlichkeitsverteilung der diskreten Zufallsvariable Y_{st} für die Anzahl der Fahrten ein einem Monat.

Autokosten

Für die Berechnung der fixen Autokosten gehen wir von folgenden geschätzten durchschnittlichen Daten pro Jahr aus:

	500 €	Werkstattkosten
+	100 €	KFZ Steuer
+	200 €	Haftpflicht
+	200 €	Sonstiges (Parkgebühren, Reinigung, zusätzliche Versicherung, Automobilclubmitgliedschaft u. ä.)
+	1400 €	abgeschriebener Anschaffungspreis (14000 € Kaufpreis mit 10 jähriger Nutzung)
=	2400 €	jährliche Fixkosten
=	200 €	monatliche Fixkosten

Da die monatlichen Autokosten von Auto-Besitzern oft geringer eingeschätzt werden bzw. die Anschaffungskosten meist nicht berücksichtigt werden, werden wir auch mit geringeren Fixkosten (z. B. 80 € oder 100 € im Monat) rechnen.

Für die variablen Kosten nehmen wir einen durchschnittlichen Literpreis von 1,15 € (entspricht in etwa dem Benzinpreis des Jahres 2004) an. Bei einem Verbrauch von 8,5 Litern auf 100 Kilometer entspricht das einem Preis von etwa 0,1 € pro Kilometer für die variablen Kosten.

	$q_F = 80$ $q_V = 0, 1$	$q_F = 100$ $q_V = 0, 1$	$q_F = 200$ $q_V = 0, 1$	$q_F = 100$ $q_V = 0, 2$
o^g	201896,9	184016,4	130836,2	111238,7
o^A	110105,9	92225,4	39045,2	19447,7

Tabelle 7.5: *Niederlande:* Berechnete Gesamtzahl an Passagieren o^g für verschiedene fixe und variable Autokosten. Die Anzahl der Passagiere, die Auto fahren ist o^A , die Anzahl der Passagiere, die Bahn fahren, ist gegeben (91791 Passagiere). Die Parameter sind $\mu = \frac{1}{100}$, $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 0, 1$.

OD-Matrix Niederlande

Bei den Berechnungen sollen neben mehreren Alternativen der öffentlichen Verkehrsmittel auch die Alternative Auto betrachtet werden. Dazu benötigen wir die Anzahl der Verkehrsteilnehmer die mit dem Auto reisen bzw. die Gesamtzahl aller Reisenden. Für Potsdam haben wir die dafür nötigen Daten gegeben. Für die Niederlande ist nur die Anzahl der Passagiere gegeben, die mit der Bahn unterwegs sind. Um auch Berechnungen mit den niederländischen Daten durchführen zu können, brauchen wir eine Hochrechnung, wie viele Passagiere insgesamt in dem OV- und IV-Netz unterwegs sind. Diese Hochrechnung führen wir folgendermaßen durch. Für jedes OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ ist (vergleiche für die Nutzenfunktion mit Abschnitt 7.3.3)

$$z_{st} = \sum_{k=0}^N \frac{e^{\mu(-\delta_1 \cdot g_{st} \cdot k - \delta_2 \cdot t_{st}^B \cdot k)}}{e^{\mu(-\delta_1 \cdot g_{st} \cdot k - \delta_2 \cdot t_{st}^B \cdot k)} + e^{\mu(-\delta_1 \cdot f_{st}^{A,k} - \delta_2 \cdot t_{st}^A)}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k]$$

der Anteil der Passagiere, die zu den gegebenen Preisen g_{st} mit der Bahn B fahren. Insbesondere ist $z_{st} \in (0, 1]$.

Hierbei sind $f_{st}^{A,k} = q_F + q_V \cdot \ell_{st}^B \cdot k$ die Kosten für k Fahrten von s nach t mit dem Auto A bei fixen monatlichen Autokosten von q_F und variablen Autokosten pro Kilometer von q_V (siehe oben), ℓ_{st}^A ist die Anzahl der Kilometer von s nach t bei einer Fahrt mit dem Auto.

Die Gesamtzahl der Passagiere o_{st}^g für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ wird dann berechnet durch

$$o_{st}^g = \frac{o_{st}^B}{z_{st}},$$

wobei o_{st}^B die Anzahl der Passagiere ist, die auf $(s, t) \in \mathcal{D}$ mit der Bahn fahren.

Für $\mu = \frac{1}{100}$, $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 0, 1$ und verschiedene Annahmen über die Autokosten wurde die Gesamtzahl der Passagiere berechnet, siehe Tabelle 7.5. Die Anzahl der Passagiere, die Bahn fahren ($\sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} o_{st}^B$) ist 91791.

7.3.2 Optimierung

Zur Erinnerung: die Einnahmefunktion sieht wie folgt aus:

$$e(\mathbf{p}) = \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{(a,k) \in \mathcal{R}_{st} \\ a \in A'_{st}}} f_{st}^{a,k}(\mathbf{p}) \cdot o_{st}^g \frac{e^{\mu(V_{st}^{a,k}(\mathbf{p}))}}{\sum_{b \in A_{st}} e^{\mu(V_{st}^{b,k}(\mathbf{p}))}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k].$$

Die Optimierung erfolgt analog zu Abschnitt 7.2.3. Es werden die negativen Einnahmen betrachtet und minimiert und dazu wieder die folgenden drei Funktionen implementiert.

1. Funktion gibt den Wert der (negativen) Einnahmefunktion an einer Stelle \mathbf{p}_0 zurück.
2. Funktion gibt den Wert des Gradientenvektors der (negativen) Einnahmefunktion an einer Stelle \mathbf{p}_0 zurück.
3. Funktion gibt den Wert der Hessematrix der (negativen) Einnahmefunktion an einer Stelle \mathbf{p}_0 zurück.

In erster Linie wurde das Minimierungsverfahren für Funktionen mehrerer Veränderlicher ohne Nebenbedingungen in Matlab verwendet, das auf einer Quasi Newton Methode basiert (vergleiche mit Abschnitt 7.2.3). In einigen kritischen Fällen wurde mit einem Nullstellenverfahren eine Nullstelle des Gradienten der Einnahmefunktion gesucht und überprüft, ob die Hesse Matrix der Einnahmefunktion an dieser Stelle positiv definit ist. Dieses Verfahren lieferte bis auf Rundungsfehler die gleichen Lösungen.

Außerdem wurden die Ergebnisse mit dem ebenfalls in Matlab implementierten Nelder-Mead Verfahren verifiziert.

In den meisten Fällen lieferten die Verfahren für unterschiedliche Startwerte die gleichen Ergebnisse. Es gab zwei Ausnahmefälle im Beispiel Potsdam.

Die Darstellung der Einnahmefunktion in Matlab für das Beispiel Niederlande, Abschnitt 7.3.3, und der Aufruf der Minimierungsalgorithmen ist im Anhang B aufgeführt.

Mit den niederländischen Daten dauert eine Auswertung der Einnahmefunktion für einen Preisvariablenvektor 0,1 Sekunden. Mit den Potsdamer Daten dauert eine Auswertung der Einnahmefunktion etwa 0,8 Sekunden. Für den Optimierungsalgorithmus, der eine Quasi Newton Methode verwendet, müssen im Schnitt 100 Funktionsauswertungen für eine Optimierung durchgeführt werden. Für den Optimierungsalgorithmus, der das Nelder-Mead Verfahren verwendet, müssen im Schnitt 180 Funktionsaufrufe durchgeführt werden. Insgesamt dauert damit ein Aufruf der Minimierungsalgorithmen für die Niederlande 10 bzw. 18 Sekunden und für Potsdam knapp 1,5 bzw. knapp 2,5 Minuten. Es wurde mit einem Pentium 3 mit 797 MHz (ein Prozessor) gerechnet.

7.3.3 Beispiel Bahnkarten-, Standardticket Niederlande

Wir betrachten den Zeitraum eines Monats und drei Alternativen, um von s nach t zu reisen, $\mathcal{A} = \{S, R, A\}$. Eine erste Möglichkeit ist mit einem Standardticket und der Bahn zu reisen (S). Dabei fällt ein Fahrpreis pro Kilometer an. Eine zweite Möglichkeit ist mit einem reduzierten Ticket bzw. einem Bahnkartenticket zu reisen (R) und sich dafür eine Bahnkarte zu kaufen. Diese gilt für einen Monat. Bei einer Fahrt mit der Bahn ist nun noch ein reduzierter Kilometerpreis zu zahlen. Wir nehmen eine Reduzierung des Kilometerpreises gegenüber dem Standardticket von 50% an. Die dritte Möglichkeit ist mit dem Auto zu reisen (A).

Die *Preisvariablen* sind damit p_B für den Preis der Bahnkarte und p_k für den Standardkilometerpreis. Die Verkehrsmittelalternativen, die sich auf den öffentlichen Verkehr beziehen, sind $\mathcal{A}' = \{S, R\}$.

Die *Fahrpreisfunktionen* bzw. die Kosten im Monat sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} f_{st}^{S,k}(p_B, p_k) &= p_k \cdot \ell_{st}^B \cdot k \\ f_{st}^{R,k}(p_B, p_k) &= p_B + \frac{1}{2} p_k \cdot \ell_{st}^B \cdot k \\ f_{st}^{A,k}(p_B, p_k) &= q_F + q_V \cdot \ell_{st}^A \cdot k, \end{aligned}$$

wobei k die Anzahl der Fahrten im Monat sind, ℓ_{st}^B ist der Abstand des OD-Paares (s, t) in Kilometern bezüglich des öffentlichen Verkehrsnetzes und ℓ_{st}^A ist der Abstand des OD-Paares (s, t) in Kilometern bezüglich des Individualverkehrs. Die Fahrpreisfunktion für die Alternative Auto ist unabhängig von den Preisvariablen und damit konstant; q_F sind die Fixkosten eines Autos, die pro Monat anfallen und q_V die variablen Kosten pro Kilometer.

Weiterhin seien die *Nutzenfunktionen* affine Funktionen aus Fahrpreis und Reisezeit. (Hierbei ist $V_{st}^{a,k}$ wieder der deterministische Nutzen für Reisealternative $(a, k) \in \mathcal{R}_{st}$ und ν_{st}^a der Zufallsnutzen für Verkehrsmittelalternative $a \in \mathcal{A}$.)

$$\begin{aligned} U_{st}^{S,k}(p_B, p_k) &= V_{st}^{S,k}(p_B, p_k) + \nu_{st}^S \\ &= -\delta_1 \cdot p_k \cdot \ell_{st}^B \cdot k - \delta_2 \cdot t_{st}^B \cdot k + \nu_{st}^S \\ U_{st}^{R,k}(p_B, p_k) &= V_{st}^{R,k}(p_B, p_k) + \nu_{st}^R \\ &= -\delta_1 (p_B + \frac{1}{2} p_k \cdot \ell_{st}^B \cdot k) - \delta_2 \cdot t_{st}^B \cdot k + \nu_{st}^R \\ U_{st}^{A,k}(p_B, p_k) &= V_{st}^{A,k}(p_B, p_k) + \nu_{st}^A \\ &= -\delta_1 (q_F + q_V \cdot \ell_{st}^A \cdot k) - \delta_2 \cdot t_{st}^A \cdot k + \nu_{st}^A. \end{aligned}$$

Die Parameter δ_1 und δ_2 gewichten den Fahrpreis und die Fahrzeit gegeneinander. Wir wählen $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 0, 1$, d. h. dass zehn Minuten Fahrzeit den Wert eines Euro haben.

Für die Zufallsvariable Y_{st} der Fahrtenhäufigkeit gelten die Annahmen aus Abschnitt 7.3.1. Die Menge der *Reisealternativen* ist dann

$$\mathcal{R} = \{S, R, A\} \times \{1, \dots, 60\}.$$

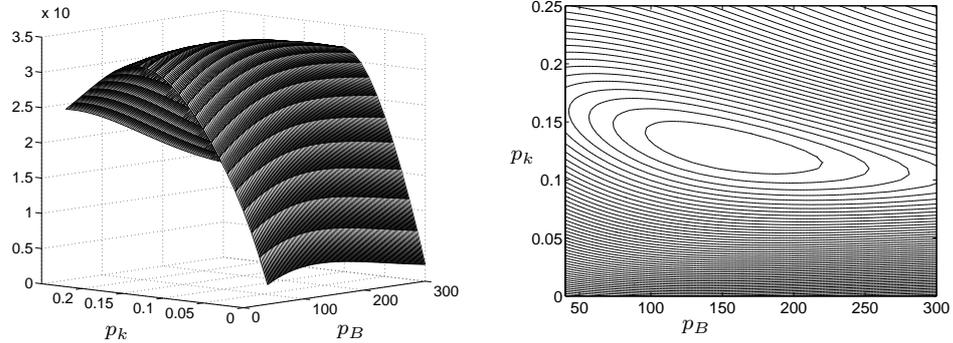


Abbildung 7.5: Links: Einnahmefunktion für Bahnkarten-, Standardticket für die Niederlande. Die Parameter sind $q_F = 100$, $q_V = 0,1$ und $\mu = \frac{1}{100}$. Das Maximum liegt bei $p_B \approx 153,31$ und $p_k \approx 0,13$. Rechts: Konturplot der Einnahmefunktion.

Insgesamt ergibt sich das folgende *Fahrpreisplanungsproblem* (FPP):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{(a,k) \in \mathcal{R} \\ a \in \mathcal{A}'}} f_{st}^{a,k}(p_B, p_k) \cdot o_{st}^g \cdot \frac{e^{\mu(V_{st}^{a,k}(p_B, p_k))}}{\sum_{b \in \mathcal{A}} e^{\mu(V_{st}^{b,k}(p_B, p_k))}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k] \\ \text{s.t.} \quad & p_B, p_k \geq 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Für die Gumbel-verteilten Störterme wählen wir für den Skalierungsparameter $\mu = \frac{1}{100}$.

Für den Fall $q_F = 100$ und $q_V = 0,1$ ist die Einnahmefunktion in Abbildung 7.5 dargestellt. Der optimale Preis in diesem Fall ist 153,31 € für die Bahnkarte und 0,13 € pro Kilometer (ohne Reduzierung). Die OD-Matrix wurde, wie in Abschnitt 7.3.1 beschrieben, hoch-gerechnet, siehe Tabelle 7.5.

In Tabelle 7.6 sind Fahrpreise und Nachfragemengen für ausgewählte OD-Paare aufgelistet. Die zweite Spalte gibt die gegebene OD-Nachfrage an. Der Parameter Z_{st}^a gibt die erwartete Anzahl an Passagieren an, die auf (s, t) mit Alternative $a \in \{S, R, A\}$ reisen (vergleiche hierzu mit der Formel (6.16)). Für den erwarteten Fahrpreis geben wir den Fahrpreis für 30 Fahrten $f_{st}^{a,30}$ für jede Alternative $a \in \{S, R, A\}$ an, da der Erwartungswert der Zufallsvariablen Y_{st} bei rund 30 liegt. In der dritten Spalte ist der derzeitige Fahrpreis für 30 Fahrten angegeben.

Die Tabelle zeigt, dass mit den gegebenen Annahmen über die Verteilung der Fahrtenhäufigkeit mehr Fahrgäste erreicht werden können, wenn statt dem bisherigen Ticket ein Standardticket und ein reduziertes Ticket für Vielfahrer angeboten wird. Insgesamt steigt die Nachfrage von derzeit 91 791 Passagieren um knapp 40% auf 126 786 Passagieren (68,9% aller Verkehrsteilnehmer).

Gleichzeitig steigen die Einnahmen für den berechneten Bahnkarten- und Kilometerpreis um 85% von derzeit 860 991 € (für das derzeitige Ticket) auf

Tabelle 7.6: Berechnete Preise und gegebene Preise für einige ausgewählte OD-Paare. In der ersten Spalte steht der Abstand des OD-Paares in Kilometern mit dem öffentlichen Verkehr. Zum Vergleich steht in der letzten Spalte der Abstand des OD-Paares in Kilometern für den Autoverkehr. Der derzeitige Fahrpreis ist g_{st} , die gegebene Nachfrage nach der Bahn ist o_{st}^B , Z_{st}^a gibt die Anzahl der Passagiere an, die mit Verkehrsmittelalternative a von s nach t reisen.

ℓ_{st}^B	o_{st}^B	$30 \cdot g_{st}$	Z_{st}^S	$f_{st}^{S,30}$	Z_{st}^R	$f_{st}^{R,30}$	Z_{st}^A	$f_{st}^{A,30}$	ℓ_{st}^A
11	1456	63	1289,3	41,69	345,0	174,15	445,5	133	11
35	5826	156	5364,2	132,66	2211,8	219,63	4755,2	214	38
50	1829	213	1360,3	189,52	801,3	248,07	475,5	265	55
106	720	420	417,4	401,78	649,5	354,19	257,1	412	104
150	24	576	14,8	568,55	38,6	437,58	22,4	547	149
202	77	723	63,1	765,65	38,3	536,13	1303,5	340	80
250	1	855	0,5	947,58	2,6	627,10	2,3	811	237
303	14	999	2,8	1148,48	25,5	727,54	3,5	1057	319

34 201 768 €.

Es wurden außerdem die optimalen Preise für fixe Autokosten von 80 € bzw. 200 € und für variable Autokosten von 0,2 € pro Kilometer berechnet. Um einen Eindruck zu bekommen, welchen Einfluss der Skalierungsparameter μ auf die berechneten Ergebnisse hat, wurden weiterhin Berechnungen mit $\mu = \frac{1}{50}$ und mit $\mu = \frac{1}{200}$ durchgeführt. Die OD-Matrix wird, wie in Abschnitt 7.3.1 beschrieben, mit den entsprechenden Parametern μ , q_F und q_V hochgerechnet. Alle Ergebnisse sind in Tabelle 7.7 dargestellt.

Je kleiner μ ist, desto größer ist im Allgemeinen der berechnete Ticketpreis. Dies bestätigt die in Abschnitt 6.2.3 geführten Betrachtungen: Je größer μ , desto stärker wirkt sich die Nutzendifferenz auf die Auswahlwahrscheinlichkeit aus und desto mehr Passagiere entscheiden sich für die Alternative mit den größten Nutzen. In diesem Fall kann eine Preisdifferenz zugunsten des öffentlichen Verkehrs mehr Passagiere zum Umsteigen auf die Bahn bewegen als für ein kleineres μ .

Im Folgenden werden noch ein paar Aspekte der Parameterwahl diskutiert. Insbesondere wird auf die Wahl des Skalierungsparameters μ eingegangen und auf numerische Schwierigkeiten hingewiesen.

Parameterwahl und Numerik

In Kapitel 6 wurde bereits diskutiert, dass die Einnahmefunktion ohne den Zufallsnutzen im Allgemeinen nicht stetig ist und die Einbeziehung eines Zufallsnutzens eine leichtere Berechnung ermöglicht. Um dies für dieses Beispiel zu veranschaulichen betrachten wir in einer Abbildung wie stark μ die Auswahlwahrscheinlichkeit einer Alternative glättet. Dazu betrachten wir

Tabelle 7.7: *Niederlande:* Berechnete Bahnkarten- und Kilometerpreise für verschiedene μ sowie verschiedene Annahmen über die fixen und variablen Autokosten (q_F bzw. q_V). Hierbei ist x^S die Nachfrage nach dem Standardticket, x^R die Nachfrage nach dem Bahnkartenticket, x^A die Nachfrage nach dem Auto. Achtung: Da die OD-Matrix für jeden Wert von μ und den fixen und variablen Autokosten auf den Gesamtverkehr hochgerechnet (Auto und öffentlich) wurde, variiert die Gesamtzahl der Verkehrsteilnehmer.

q_F	q_V	μ	p_k	p_B	$x^R (10^4)$	$x^S (10^4)$	$x^A (10^4)$	$e (10^7)$
80	0,1	$\frac{1}{50}$	0,12	112,14	8,7	7,0	6,4	4,0
		$\frac{1}{100}$	0,12	150,51	6,2	7,2	6,7	3,6
		$\frac{1}{200}$	0,14	223,20	4,7	6,7	7,6	3,6
100	0,1	$\frac{1}{50}$	0,13	116,44	7,6	6,3	4,9	3,6
		$\frac{1}{100}$	0,13	153,31	5,9	6,8	5,7	3,4
		$\frac{1}{200}$	0,15	226,05	4,6	6,5	7,0	3,5
100	0,2	$\frac{1}{50}$	0,12	123,03	5,6	2,2	2,4	3,4
		$\frac{1}{100}$	0,26	192,44	4,4	3,6	3,2	3,5
		$\frac{1}{200}$	0,26	274,92	3,8	4,5	4,3	3,9
200	0,1	$\frac{1}{50}$	0,16	140,45	5,0	5,0	2,0	2,8
		$\frac{1}{100}$	0,16	169,47	4,6	5,5	3,0	3,0
		$\frac{1}{200}$	0,17	240,76	4,1	5,8	4,8	3,4

die deterministischen Nutzenfunktionen der drei Alternativen für $p_B = 100$, $p_k = 0, 1$, $q_F = 100$, $q_V = 0, 1$. Die Werte der drei Nutzenfunktionen liegen abhängig von der Fahrtenhäufigkeit und der Fahrzeit bzw. des Abstands des OD-Paares zwischen -3000 und 0. Wir legen für die Alternativen Auto und Standardticket ein OD-Paar fest und für die Fahrtenhäufigkeit $k = 30$. Damit erhalten wir einen festen Nutzen für die beiden Alternativen. Den Nutzen der Alternative Bahnkartenticket variieren wir zwischen -3000 und 0. Wir betrachten die Auswahlwahrscheinlichkeit des Bahnkartentickets bezüglich der anderen beiden Alternativen. In Abbildung 7.6 ist diese Auswahlwahrscheinlichkeit für verschiedene μ dargestellt. Man kann in dieser Abbildung erkennen, dass bereits für $\mu = \frac{1}{10}$ die Auswahlwahrscheinlichkeit sehr einer Treppenfunktion gleicht. Eine Skalierung der Nutzenfunktion mit $\mu = \frac{1}{100}$ ist damit akzeptabel, da ein gewisser Zufallsnutzen in die Betrachtung einbezogen werden soll.

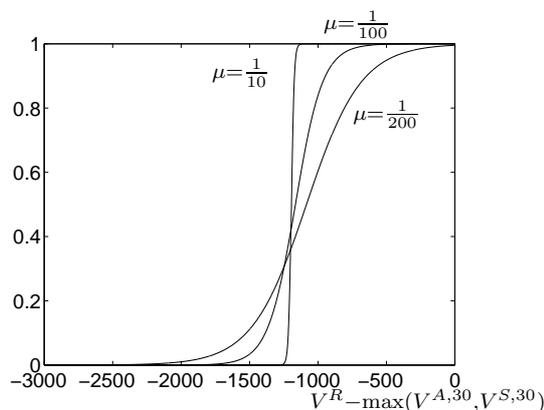


Abbildung 7.6: Auswahlwahrscheinlichkeit des Bahnkartentickets, bei Variation des deterministischen Nutzens zwischen -3000 und 0, wobei die deterministischen Nutzen für Standardticket und Auto für ein OD-Paar als fest betrachtet werden. Die Parameter sind hierbei $p_B = 100$, $p_k = 0.1$, $q_F = 100$, $q_V = 0,1$ und $k = 30$.

Statt den Parameter μ um den Faktor k zu ändern, können mit dem gleichen Effekt die Parameter δ_1 und δ_2 geändert werden, betrachte hierzu die Nutzenfunktionen und das Fahrpreisplanungsproblem (7.6).

Allerdings kann eine bestimmte Wahl der Parameter schnell zu numerischen Schwierigkeiten führen, da mit einem Quotienten von Exponentialfunktionen gerechnet wird und die Parameter als Faktor im deterministischen Nutzen im Exponenten stehen. Zum Beispiel kann in diesem Fall die Einnahmefunktion für $\mu = 1$, $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 0,1$ nicht mehr ausgewertet werden, da der Wert des Nenners der Einnahmefunktion unterhalb der Rechengenauigkeit von Matlab liegt und zu null gerundet wird.

Daher wurden die Berechnungen in numerischer Hinsicht auf sehr elementarem Weg stabilisiert, indem die Nutzenfunktion um +1500 verschoben wurde, d. h.

$$V_{st}^{a,k}(p_B, p_k) := 1500 + V_{st}^{a,k}(p_B, p_k).$$

Dadurch liegen mehr Werte im berechenbaren Zahlenbereich. Die Verschiebung der Nutzenfunktion beeinflusst das Fahrpreisplanungsproblem, siehe Gleichung (7.6), in mathematischer Hinsicht nicht, da sie einer Multiplikation der Zielfunktion mit $\frac{e^{1500 \cdot \mu}}{e^{1500 \cdot \mu}} = 1$ entspricht. (Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung von Formel (6.14) für die Auswahlwahrscheinlichkeit in der Einnahmefunktion statt der Formel (6.13).)

7.3.4 Beispiel Einzel-, Monatsticket Potsdam

Wir betrachten den Zeitraum eines Monats und für jedes Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ drei Verkehrsmittelalternativen $\mathcal{A} = \{E, M, A\}$. Die erste Alternative bezeichnet die Verwendung eines Einzeltickets (E), die zweite eines Monatstickets (M) und die dritte Alternative steht für die Nutzung des Autos (A).

Die *Preisvariablen* sind p_E für das Einzelticket und p_M für das Monats-ticket. Die Alternativen, für die wir den Fahrpreis optimieren wollen, sind $\mathcal{A}' = \{E, M\}$. Die *Fahrpreisfunktionen* bzw. die Kosten im Monat sind, je nachdem wie viele Fahrten k im Monat unternommen werden, folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} f_{st}^{E,k}(p_B, p_k) &= p_E \cdot k \\ f_{st}^{M,k}(p_B, p_k) &= p_M \\ f_{st}^{A,k}(p_B, p_k) &= q_F + q_V \cdot \ell_{st}^A \cdot k. \end{aligned}$$

Die Fahrpreisfunktion für die Alternative Auto ist unabhängig von den Preisvariablen und damit konstant; q_F sind die Fixkosten eines Autos, die pro Monat anfallen und q_V die variablen Kosten pro Kilometer, ℓ_{st}^A ist der Abstand des OD Paares $(s, t) \in \mathcal{D}$ bzgl. des IV-Netzes in Kilometern.

Weiterhin seien die *Nutzenfunktionen* affine Funktionen aus Fahrpreis und Reisezeit:

$$\begin{aligned} U_{st}^{E,k}(p_E, p_M) &= V_{st}^{E,k}(p_E, p_M) + \nu_{st}^E \\ &= -\delta_1 \cdot p_E \cdot k - \delta_2 \cdot t_{st}^B \cdot k + \nu_{st}^E \\ U_{st}^{M,k}(p_E, p_M) &= V_{st}^{M,k}(p_E, p_M) + \nu_{st}^M \\ &= -\delta_1 \cdot p_M - \delta_2 \cdot t_{st}^B \cdot k + \nu_{st}^M \\ U_{st}^{A,k}(p_E, p_M) &= V_{st}^{A,k}(p_E, p_M) + \nu_{st}^A \\ &= -\delta_1(q_F + q_V \cdot \ell_{st}^A \cdot k) - \delta_2 \cdot t_{st}^A \cdot k + \nu_{st}^A. \end{aligned}$$

Hierbei sind δ_1 und δ_2 wie im Beispiel für die Niederlande Parameter, die den Fahrpreis und die Fahrzeit gegeneinander gewichten. Wir wählen auch hier $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 0.1$.

Für die Zufallsvariable Y_{st} der Fahrtenhäufigkeit gelten die Annahmen aus Abschnitt 7.3.1. Die Menge der *Reisealternativen* ist dann

$$\mathcal{R} = \{E, M, A\} \times \{1, \dots, 60\}.$$

Insgesamt ergibt sich das folgende *Fahrpreisplanungsproblem* (FPP):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{(s,t) \in \mathcal{D}} o_{st}^g \sum_{k=1}^N \frac{p_E \cdot k \cdot e^{\mu V_{st}^{E,k}(p_E, p_M)} + p_M \cdot e^{\mu V_{st}^{M,k}(p_E, p_M)}}{\sum_{b \in \mathcal{A}} e^{\mu V_{st}^{b,k}(p_E, p_M)}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k] \\ \text{s.t.} \quad & p_E, p_M \geq 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Für fixe Autokosten von 100 € und variable Autokosten von 0,1 € pro Kilometer liegen die Werte des deterministischen Nutzens für das Auto zwischen -630 und -100. Wir verschieben daher die Nutzenfunktion analog zum Beispiel Niederlande um +300, und für die Gumbel-verteilten Störterme wählen wir für den Skalierungsparameter μ den Wert $\frac{1}{30}$.

Außerdem wählen wir zunächst $q_F = 100$ und $q_V = 0, 1$. Zur Zeit gibt es in Potsdam zwei Preise bzw. zwei Tarifgebiete (vergleiche mit Tabelle 2.2). Ein Einzelticket kostet 1,45 bzw. 2,20 und ein Monatsticket kostet 32,50 bzw. 49,50. Bei der Optimierung des Einzelticket- und Monatsticketpreises beschränken wir uns auf gesamt Potsdam. Da sich Fahrzeiten und Längen in den beiden Tarifgebieten kaum unterscheiden, führt eine Berechnung getrennt nach Tarifgebieten zu einem ähnlichen Ergebnis.

Eine Optimierung ergibt für den Preis des Monatstickets 77,61 € und für den Preis des Einzeltickets 3,49 € für ganz Potsdam. Die erwartete Nachfrage ist nach den Berechnungen für das Einzelticket 59 174,0 Passagiere und für das Monatsticket 73 996,7 Passagiere. Damit steigt die Gesamtnachfrage nach dem öffentlichem Verkehr um rund 50%, obwohl die berechneten Preise um das zwei bis dreifache über den derzeitigen Preisen liegen.

Das scheint darauf hinzudeuten, dass die Parameter des Modells nicht richtig geschätzt sind oder das Auto einen zusätzlichen Nutzen enthält, der bisher nicht berücksichtigt wurde. Wir werden daher unser Modell mit der gegebenen Situation (derzeit gültiger Preis und gegebene Nachfrage nach dem öffentlichen Verkehr) skalieren.

Zunächst werden die OD-Paare den Tarifgebieten 1 und 2 zugeordnet, vergleiche mit Abschnitt 7.2.4:

$$\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \text{ mit } (s, t) \in \mathcal{D}_i \Leftrightarrow g_{st} = \text{Tarif } i, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Dann werden für jedes Tarifgebiet $i = 1, 2$ Parameter des Modells so variiert, dass die berechnete erwartete Gesamtnachfrage des öffentlichen Verkehrs dem zur Zeit gültigen Einzelticket- und Monatsticketpreis der gegebenen Nachfrage entspricht, d. h., es wird folgendes Problem betrachtet

$$\sum_{(s,t) \in \mathcal{D}_i} \left(o_{st}^B - \sum_{k=1}^N (x_{st}^{M,k}(p_E, p_M) + x_{st}^{E,k}(p_E, p_M)) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (7.8)$$

mit

$$x_{st}^{M,k} = o_{st}^g \frac{e^{\mu V_{st}^{M,k}(p_E, p_M)}}{e^{\mu V_{st}^{E,k}(p_E, p_M)} + e^{\mu V_{st}^{M,k}(p_E, p_M)} + e^{\mu V_{st}^{A,k}(p_E, p_M)}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k]$$

$$x_{st}^{E,k} = o_{st}^g \frac{e^{\mu V_{st}^{E,k}(p_E, p_M)}}{e^{\mu V_{st}^{E,k}(p_E, p_M)} + e^{\mu V_{st}^{M,k}(p_E, p_M)} + e^{\mu V_{st}^{A,k}(p_E, p_M)}} \cdot \mathbb{P}[Y_{st} = k].$$

Hierbei werden Berechnungen für drei verschiedene Parameter betrachtet:

1. Es wird der Gewichtungsparemeter für die Fahrzeit δ_2 bestimmt, der die Gleichung 7.8 löst.
2. Ein Parameter y_1 , der den Anteil der tatsächlich wahrgenommenen Autokosten angibt und Gleichung 7.8 löst, wird bestimmt, d. h. in diesem Fall betrachten wir die folgende Nutzenfunktion des Autos:

$$V_{st}^{A,k}(p_E, p_M) = -(y_1 \cdot (100 + 0, 1 \cdot \ell_{st}^A \cdot k)) - 0, 1 \cdot t_{st}^A \cdot k.$$

Tabelle 7.8: Berechnete Preise mit dem Gewichtungsparemeter der Fahrzeit δ_2 , dem Parameter für den Anteil wahrgenommener Autokosten y_1 bzw. dem Parameter für einen Zusatznutzen für das Auto, die Gleichung (7.8) lösen. Hierbei ist x^E die Nachfrage nach dem Einzelticket und x^M die Nachfrage nach dem Monatsticket. Für die anderen Parameter gilt $\mu = \frac{1}{30}$, $q_F = 100$ und $q_V = 0,1$. Zum Vergleich stehen in Zeile 1 die optimierten Preise und berechneten Nachfragen ohne Änderung des Modells bzw. der Parameter.

δ_2	y_1	y_2	p_E	p_M	x^E	x^M	e
0,1	1	0	3,49	77,61	59 174,0	73 996,7	9 026 687,0
0,36	1	0	4,74	63,33	25 510,2	29 550,0	2 966 253,9
0,1	0,33	0	1,87	46,90	38 773,6	32 727,3	2 771 753,2
0,1	1	82	1,68	46,13	37 685,2	31 162,6	2 621 902,0

- Ein Parameter y_2 , der einen zusätzlichen Nutzen für Alternative Auto beschreibt und Gleichung 7.8 löst, wird bestimmt, d. h. in diesem Fall betrachten wir die folgende Nutzenfunktion des Autos:

$$V_{st}^{A,k}(p_E, p_M) = -(200 + 0,1 \cdot \ell_{st}^A \cdot k) + y_2 - 0,1 \cdot t_{st}^A \cdot k.$$

Die Ergebnisse sind

- $\delta_2 = 0,46$ für Tarifgebiet 1 und $\delta_2 = 0,26$ für Tarifgebiet 2,
- $y_1 = 0,19$ für Tarifgebiet 1 und $y_1 = 0,46$ für Tarifgebiet 2,
- $y_2 = 93,42$ für Tarifgebiet 1 und $y_2 = 70,74$ für Tarifgebiet 2.

Der erste Fall bedeutet, dass die Fahrzeit eine größere Rolle für die Nutzenfunktion hat, als bisher angenommen. In diesem Fall haben 10 Minuten Fahrzeit im Durchschnitt den Wert von 3,60 € statt wie bisher angenommen von einem Euro. Da die Fahrzeiten des öffentlichen Verkehrs für die gegebenen Daten im Durchschnitt um das 2,6-fache über den Fahrzeiten des Autos liegen, sinkt damit der Nutzen des öffentlichen Verkehrs sehr viel stärker als der des Autos.

Der zweite Fall bedeutet, dass die Verkehrsteilnehmer die Autokosten im Durchschnitt um knapp 70% unterschätzen (wobei die Annahme von 100 € Fixkosten im Monat bereits unterschätzt ist).

Im dritten Fall wurde ein positiver Zusatznutzen von durchschnittlich 82 € für das Auto berechnet. Er könnte zum Beispiel ein Bequemlichkeitsmaß des Autos gegenüber dem öffentlichen Verkehr beschreiben.

Die berechneten Parameter werden jeweils in unser Fahrpreisplanungsmodell integriert und die Einnahmen für $\mu = \frac{1}{30}$, $q_F = 100$ und $q_V = 0,1$ werden erneut maximiert. Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.8 dargestellt.

Zur Erinnerung: Die zur Zeit gültigen Preise sind 1,45/2,20 € für das Einzelticket und 32,50/49,50 € für das Monatsticket. Die gegebene Nachfrage beträgt 66 501 Passagiere.

Für den Gewichtungparameter der Fahrzeit $\delta_2 = 0,36$ liegen die berechneten Preise deutlich über den gegebenen Preisen. Die Nachfrage sinkt um etwa 20%. Gegenüber den optimalen Preisen des ursprünglichen Fahrpreisplanungsproblems sinkt der Einzelticketpreis aber der Monatsticketpreis steigt. Für den Parameter, der den Anteil der wahrgenommenen Autokosten schätzt, sowie für den Parameter, der einen zusätzlichen Nutzen für das Auto angibt, liegen die berechneten Preise zwischen den derzeitigen Preisen aus den beiden Tarifgebieten und deutlich unter den mit dem ursprünglichen Fahrpreisplanungsproblem berechneten Preisen. Die Nachfrage steigt um 7% bzw. um 4%.

Diese Berechnung zeigen, dass der Einfluss eines Parameters für den Anteil der wahrgenommenen Autokosten bzw. eines Parameters, der einen Zusatznutzen für das Auto angibt sehr viel größer ist als die Änderung des Gewichtungsparemters.

Weiterhin wurden Berechnungen für verschiedene fixe und variable Autokosten sowie Werte des Skalierungsparameters μ zwischen $\frac{1}{10}$ und $\frac{1}{100}$ durchgeführt (hier ist wieder $\delta_1 = 1$ und $\delta_2 = 0,1$).

In Tabelle 7.9 sind die optimal berechneten Preise und Gesamteinnahmen für diese Berechnungen aufgelistet.

Alle Berechnungen wurden mit den beiden erwähnten Minimierungsalgorithmen durchgeführt. Um die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, das globale Optimum zu finden, wurden beide Minimierungsalgorithmen mit drei verschiedenen Startwerten durchgeführt. Die Verwendung von zu großen Startwerten führte insbesondere bei dem Minimierungsalgorithmus, der eine Quasi Newton Methode verwendet, häufig zu einem Abbruch, da die vom Algorithmus zu berechnenden Eigenwerte zu klein wurden. Dies ist wieder durch die betragsmäßig hohen Werte in der Exponentialfunktion zu begründen, vergleiche mit dem Abschnitt 7.3.3 über Parameter und Numerik bei den Berechnungen für die Niederlande.

In einigen Fällen wurde überprüft, dass der Gradient der Einnahmefunktion am berechneten Wert fast Null und die Hesse Matrix positiv definit ist. Abgesehen von Rundungsfehlern, waren diese Bedingungen für die berechneten Werte erfüllt.

Für $\mu = \frac{1}{10}$ ist der Preis des Einzeltickets stets größer als der Preis des Monatstickets. Berechnet man für diese Fälle die erwartete Nachfrage, so würden sich rund 500 Passagiere (0,25%) für ein Einzelticket entscheiden.

Der höhere Einzelticketpreis gegenüber dem Monatsticket lässt sich folgendermaßen erklären: Dazu ist der Plot der Einnahmefunktion für den Fall $q_F = 100$ und $q_V = 0,1$ in Abbildung 7.7 dargestellt. Die Einnahmefunktion hat für einen festen Monatsticketpreis (etwa 64 €) die Form eines Gebirgskamms, d.h. es werden hauptsächlich Einnahmen mit dem Monatsticket erzielt. Wird bei einer Berechnung der maximalen Einnahmen auf die Alternative Einzelticket verzichtet, werden in etwa die gleichen Einnahmen

Tabelle 7.9: *Potsdam:* Berechnete Preise für verschiedene fixe und variable Autokosten sowie Skalierungsparameter μ . Hierbei sind q_F Autofixkosten, q_V variable Autokosten, p_E berechneter Preis für das Einzelticket und p_M berechneter Preis für das Monatsticket. Gerechnet wurde mit einem Quasi Newton Verfahren und dem Nelder-Mead Verfahren für die Startwerte $[1, 1]$, $[1, 10]$, $[0, 50]$. Waren die Berechnungen für alle Startwerte gleich, sind sie nicht extra aufgeführt. In zwei Fällen wich das Quasi Newton Verfahren für den Startwert $[0, 50]$ von dem Nelder-Mead Verfahren und der Berechnung mit den anderen beiden Startwerten ab (gekennzeichnet durch QN). Dies liegt daran, dass die Einnahmefunktion in den meisten Fällen einen Gebirgskamm mit vielen lokalen Optimalwerten besitzt.

q_F	q_V	μ	Startwert	p_E	p_M	Einnahmen
80	0,1	$\frac{1}{10}$	$[1, 1], [1, 10]$	60,18	49,87	7 058 990,07
			$[0, 50]$ QN	60,08	49,87	7 058 989,83
		$\frac{1}{30}$		2,80	68,07	7 119 191,15
		$\frac{1}{50}$		3,46	94,22	8 551 710,00
		$\frac{1}{100}$		5,59	162,59	12 581 547,71
100	0,1	$\frac{1}{10}$		75,40	64,24	10 045 388,23
		$\frac{1}{30}$		3,49	77,61	9 026 686,96
		$\frac{1}{50}$		3,86	102,64	10 232 047,57
		$\frac{1}{100}$		5,89	169,85	14 037 688,33
100	0,2	$\frac{1}{10}$		83,56	75,60	12 543 878,89
		$\frac{1}{30}$		3,88	90,72	11 070 367,15
		$\frac{1}{50}$		4,13	114,86	12 074 364,28
		$\frac{1}{100}$		6,07	179,51	15 612 509,90
200	0,1	$\frac{1}{10}$		159,66	147,53	27 571 078,92
		$\frac{1}{30}$		162,96	141,43	22 764 521,94
		$\frac{1}{50}$	$[1, 1], [1, 10]$	8,25	153,67	20 485 316,27
			$[0, 50]$ QN	139,47	148,94	20 291 400,40
		$\frac{1}{100}$		7,80	212,63	22 474 753,55

zum gleichen Monatsticketpreis erzielt wie bei den Berechnungen mit der Alternative Einzelticket.

Gleiches gilt für alle anderen Berechnungen mit $\mu = \frac{1}{10}$ und für die Berechnung mit $\mu = \frac{1}{30}$, $q_F = 200$, $q_V = 0, 1$. In den anderen Fällen können die

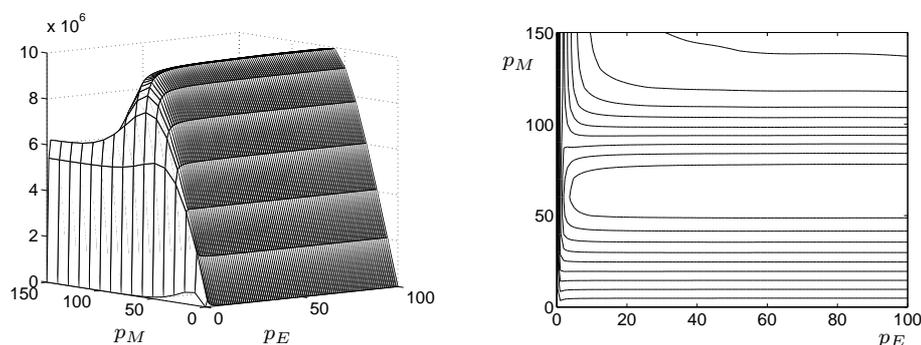


Abbildung 7.7: Links: Einnahmefunktion für Einzelticket und Monatsticket für Potsdam. Die Parameter sind $q_F = 100$, $q_V = 0,1$ und $\mu = \frac{1}{10}$. Rechts: Konturplot der Einnahmefunktion.

maximalen Einnahmen erhöht werden, wenn neben dem Monatsticket ein Einzelticket angeboten wird. Für den Fall $\mu = \frac{1}{50}$, $q_F = 200$ und $q_V = 0,1$ ist diese Erhöhung gering, siehe Tabelle 7.9 bzw. 7.10. Wird nur ein Monatsticket angeboten liegen die maximalen Einnahmen bei rund 20,3 Millionen. Ein zusätzliches Einzelticket würde die Einnahmen um rund 0,2 Millionen steigern.

In Tabelle 7.10 sind die Berechnungen für den Fall aufgelistet, dass nur Monatsticket und Auto bzw. nur Einzelticket und Auto als Verkehrsmittelalternativen zur Verfügung stehen. Für den Fall $\mu = \frac{1}{100}$, $q_F = 100$ und $q_V = 0,1$ könnten die Einnahmen um knapp 4 Millionen Euro erhöht werden, wenn neben dem Monatsticket ein Einzelticket angeboten wird.

Wir haben bereits gesehen: Je größer der Skalierungsparameter μ , desto kleiner ist der Zufallsnutzen. Ein Skalierungsparameter von $\frac{1}{10}$ bedeutet in diesem Fall, dass die Passagiere sich sehr rational für eine Alternative entscheiden und nur Fahrzeiten und Preise der Alternativen in die Entscheidung mit einbeziehen. Der für diese Beispiele berechnete Monatsticketpreis liegt deutlich unter den Autofixkosten. Dies lässt sich durch die hohen Fahrzeitunterschiede zugunsten des Autos erklären, die dadurch ausgeglichen werden. Da die zurückgelegten Distanzen relativ gering sind, haben die variablen Autokosten keinen großen Einfluss. Somit können die meisten Passagiere für ein Monatsticket gewonnen werden, zwischen 70% und 90% je nach Autokosten. Durch den geringen Monatsticketpreis und den hohen Fahrzeiten im öffentlichen Verkehr ist das Auto nur für diejenigen mit einer hohen Fahrtenhäufigkeit im Monat interessant. Ein alternatives Einzelticket würde nur Passagiere vom Monatsticket abwerben und keine Autofahrer.

Wird der Skalierungsparameter μ kleiner gewählt, finden mehr zufällige Entscheidungen statt. Der Monatsticketpreis kann teurer gewählt werden, weil es genügend Passagiere gibt, die sich für ein Monatsticket entscheiden, obwohl der Nutzen des Autos in einigen Fällen größer ist. Auch gibt es Passagiere, die sich mit einer hohen Fahrtenhäufigkeit für ein Einzelticket

Tabelle 7.10: Berechneter Einzelticketpreis und Einnahmen, wenn als Verkehrsmittelalternativen nur Einzelticket und Auto zur Verfügung stehen (Spalten 4 und 5) bzw. berechneter Monatsticketpreis und Einnahmen, wenn als Verkehrsmittelalternativen nur Monatsticket und Auto zur Verfügung stehen (Spalten 6 und 7) für verschiedene Annahmen über fixe und variable Autokosten sowie Skalierungsparameter μ .

q_F	q_V	μ	p_E	Einnahmen	p_M	Einnahmen
80	0,1	$\frac{1}{10}$	1,34	4 624 323,3	49,86	7 052 661,5
		$\frac{1}{30}$	1,91	4 815 502,8	63,65	6 391 117,9
		$\frac{1}{50}$	2,58	5 429 511,5	85,34	6 900 574,9
		$\frac{1}{100}$	4,37	7 485 896,2	145,57	9 248 837,9
100	0,1	$\frac{1}{10}$	1,62	6 400 999,0	64,23	10 039 337,2
		$\frac{1}{30}$	2,13	6 299 742,7	73,98	8 555 577,6
		$\frac{1}{50}$	2,77	6 699 370,1	93,59	8 632 488,0
		$\frac{1}{100}$	4,53	8 517 706,7	151,95	10 580 414,1
100	0,2	$\frac{1}{10}$	2,03	8 656 297,6	75,57	12 535 974,0
		$\frac{1}{30}$	2,41	8 200 346,6	84,05	10 552 086,6
		$\frac{1}{50}$	2,98	8 293 954,0	102,38	10 308 296,1
		$\frac{1}{100}$	4,65	9 747 424,5	158,89	11 883 270,8
200	0,1	$\frac{1}{10}$	3,18	16 277 556,4	147,53	27 565 415,8
		$\frac{1}{30}$	3,51	15 363 025,7	141,38	22 741 164,9
		$\frac{1}{50}$	3,98	14 734 827,7	148,80	20 243 367,4
		$\frac{1}{100}$	5,49	14 876 974,1	192,37	19 039 619,4

entscheiden.

Damit lassen sich die unterschiedlichen berechneten Preise für verschiedene Werte des Skalierungsparameters μ begründen.

Berechnung ohne Zufallsnutzen

Hier werden für ein Beispiel die optimalen Monats- und Einzelticketpreise bestimmt, wenn wir keinen Zufallsnutzen verwenden.

Fahrpreisfunktionen und deterministische Nutzenfunktionen seien wie am Anfang dieses Abschnitts definiert, d. h. wir betrachten den deterministischen Nutzen gewichtet aus Fahrzeit und Fahrpreis. Die Gewichtung-

parameter seien wieder $\delta_1 = 1$ für den Fahrpreis und $\delta_2 = 0,1$ für die Fahrzeit.

Wir können bezüglich der Fahrtenhäufigkeit bestimmen, wann das Einzelticket bzw. das Monats ticket die Alternative mit dem größten Nutzen ist. Dabei legen wir fest, dass das Einzelticket nur dann gewählt wird, wenn sein Nutzen echt größer ist als der Nutzen vom Monats ticket oder vom Auto.

Für das Einzelticket:

$$\begin{aligned} V_{st}^{E,k} > V_{st}^{M,k} &\Leftrightarrow p_E \cdot k < p_M \\ &\Leftrightarrow k < \frac{p_M}{p_E} \\ &\text{falls } p_E > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{st}^{E,k} > V_{st}^{A,k} &\Leftrightarrow p_E \cdot k + 0,1 \cdot t_{st}^B \cdot k < q_F + q_V \cdot \ell_{st}^A \cdot k + 0,1 \cdot t_{st}^A \cdot k \\ &\Leftrightarrow k < \frac{q_F}{p_E + 0,1 \cdot t_{st}^B - q_V \cdot \ell_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^A} \\ &\text{falls } p_E + 0,1 \cdot t_{st}^B - q_V \cdot \ell_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^A > 0 \end{aligned}$$

und $k > 0$
sonst.

Für das Monats ticket:

$$\begin{aligned} V_{st}^{M,k} \geq V_{st}^{E,k} &\Leftrightarrow p_M \leq p_E \cdot k \\ &\Leftrightarrow k \geq \frac{p_M}{p_E} \\ &\text{falls } p_E > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{st}^{M,k} \geq V_{st}^{A,k} &\Leftrightarrow p_M + 0,1 \cdot t_{st}^B \leq q_F + q_V \cdot \ell_{st}^A \cdot k + 0,1 \cdot t_{st}^A \\ &\Leftrightarrow k \geq \frac{p_M - q_F}{q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B} \\ &\text{falls } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B > 0 \end{aligned}$$

$$\text{und } k \leq \frac{p_M - q_F}{q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B}$$

falls $q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B < 0$

und $k \geq 1$

$$\begin{aligned} &\text{falls } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B = 0 \\ &\text{und } p_M \leq q_F \end{aligned}$$

(sonst unerfüllt).

Mit diesen Betrachtungen erhalten wir die Bedingungen, für die Monats-
ticket bzw. Einzelticket die Alternativen mit dem größten Nutzen sind. Wir
können daher auf die Indikatorfunktion verzichten (Gleichung 6.18) und er-
halten für unser Fahrpreisplanungsproblem

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{s,t} o_{st}^g \cdot \mathbb{P}(Y = k) \left(\sum_{k=1}^{A(p_M, p_E)} p_E \cdot k + \sum_{k=B(p_M, p_E)}^{C(p_M, p_E)} p_M \right) \\
s.t. \quad & A(p_M, p_E) = \min \left(N_{st}, \left\lceil \frac{p_M}{p_E} - 1 \right\rceil, \left\lceil \frac{q_F}{p_E + 0,1 \cdot t_{st}^B - q_V \cdot \ell_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^A} - 1 \right\rceil \right) \\
& \quad \text{falls } p_E + 0,1 \cdot t_{st}^B - q_V \cdot \ell_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^A > 0 \\
& A(p_M, p_E) = \min \left(N_{st}, \left\lceil \frac{p_M}{p_E} - 1 \right\rceil \right) \\
& \quad \text{falls } p_E + 0,1 \cdot t_{st}^B - q_V \cdot \ell_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^A \leq 0 \\
& B(p_M, p_E) = \max \left(1, \left\lceil \frac{p_M}{p_E} \right\rceil, \left\lceil \frac{p_M - q_F}{q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B} \right\rceil \right) \\
& \quad \text{falls } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B > 0 \\
& B(p_M, p_E) = \max \left(1, \left\lceil \frac{p_M}{p_E} \right\rceil \right) \\
& \quad \text{falls } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B = 0 \text{ und } p_M \leq q_F \\
& \quad \text{oder } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B < 0 \\
& C(p_M, p_E) = \left\lceil \frac{p_M - q_F}{q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B} \right\rceil \\
& \quad \text{falls } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B < 0 \\
& C(p_M, p_E) = N_{st} \\
& \quad \text{falls } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B > 0 \\
& \quad \text{oder } q_V \cdot \ell_{st}^A + 0,1 \cdot t_{st}^A - 0,1 \cdot t_{st}^B = 0 \text{ und } p_M \leq q_F \\
& p_E, p_M \geq 0.
\end{aligned}$$

Es wurde eine Berechnung für Autokosten von $q_F = 100$ und $q_V = 0,1$ durchgeführt. Für die Zufallsvariable der Fahrtenhäufigkeit gelten wieder die Annahmen aus Abschnitt 7.3.1.

Da die Einnahmefunktion nicht stetig ist (vergleiche mit Bemerkung 6.4), kann für die Berechnung nur ein Verfahren verwendet werden, das keine Ableitungen benötigt. Zur Berechnung des optimalen Preises wurde daher der Algorithmus verwendet, der das Nelder-Mead Verfahren benutzt. Aber auch dieses Verfahren hatte für diese Berechnung Probleme.

Die maximalen Einnahmen werden für einen Monatsticketpreis von rund 64,50 € und einem Einzelticket mindestens so teuer wie das Monatsticket

erzielt. Die Einnahmen betragen etwa 9,9 Millionen Euro.

Ein ähnlicher Monatsticketpreis wurde auch bei der Einbeziehung eines Zufallsnutzens mit einem Skalierungsparameter von $\mu = \frac{1}{10}$ berechnet, siehe Tabelle 7.9. Der Einfluss des Zufallsnutzens ist für diesen Wert des Skalierungsparameters noch relativ gering. Daher unterscheiden sich diese berechneten Ergebnisse kaum.

An diesem Beispiel kann man sehen, dass die Verwendung eines Zufallsnutzens die Berechnung stark vereinfacht.

7.3.5 Zusammenfassung

Für die Niederlande und Potsdam wurden Berechnungen mit dem Fahrpreisplanungsmodell unter Verwendung von Entscheidungsmodellen (Logit Modell) mit relativ einfachen Preissystemen durchgeführt. In den meisten Fällen führte die Optimierung zu eindeutigen Ergebnissen. Das Beispiel für die Niederlande hat gezeigt, dass mit der Einführung zweier Ticketarten (statt dem bisherigen Ticket) die Einnahmen und die Nachfrage erhöht werden können. Aus dem Beispiel für Potsdam können zwei Schlussfolgerungen gezogen werden: Entweder ist es aus Sicht des Verkehrsunternehmens besser kein Einzelticket anzubieten, oder neben Fahrzeit und Fahrpreis gibt es noch andere wichtige Faktoren des Nutzens, die bisher nicht berücksichtigt wurden.

In diesen Berechnungen wurden bereits mehr Aspekte der Verkehrsmittelwahl aller Verkehrsteilnehmer berücksichtigt, als bei der Verwendung von elementaren Funktionen für die Nachfrage. Dennoch begrenzen die gegebenen Daten die Aussagekraft der berechneten Ergebnisse.

Dies hat zwei Gründe: Zum einen sind die gegebenen Nachfragemengen und die derzeitigen Preise in unterschiedlichen Jahren gesammelt und passen daher eventuell nicht zueinander. Zum anderen mussten auf Grund fehlender Daten einige Annahmen getroffen werden: Die Verteilung der Fahrtenhäufigkeit wurde zum Beispiel geschätzt. Da es keine Angaben über die Anzahl aller Verkehrsteilnehmer für die Niederlande gab, wurde die OD Matrix, die die Anzahl der Fahrgäste für den Bahnverkehr angab, auf den gesamten Verkehr hochgerechnet. Diese Hochrechnung ergab auf einigen Strecken das Dreizehnfache der Bahnfahrer. Es stellt sich die Frage, ob diese Anzahl für die Niederlande realistisch ist.

Für die Bestimmung der Parameter des Modells (die Gewichtungsparemeter im deterministischen Nutzens und der Skalierungsparameter μ des Zufallsnutzens) konnte ebenfalls nicht auf Erfahrungswerte zurückgegriffen werden. Hierbei wurde der Skalierungsparameter μ so gewählt, dass der deterministische Nutzen sichtbar aber nicht zu stark durch einen Zufallsnutzen gestört wurde.

Das Beispiel Potsdam hat gezeigt, dass die Festlegung verschiedener Parameter für das Entscheidungsmodell mit der gegebenen Situation zu unter-

schiedlichen Optimalwerten des Fahrpreisplanungsproblems führt.

Um die Parameter genauer festzulegen, können verschiedene statistische Methoden angewendet werden, z. B. ist die Verwendung einer Beobachtungsreihe über das Nachfrageverhalten aller Verkehrsteilnehmer möglich. Eine Beobachtungsreihe heißt in diesem Fall, dass durch eine Umfrage Informationen über das derzeitige und das geplante Nachfrageverhalten gesammelt werden. Hierbei können z. B. verschiedene Szenarien (für Fahrpreis und Fahrzeit) vorgegeben werden und der Befragte entscheidet sich daraufhin für eine Verkehrsmittelalternative. Die Parameter des Modells werden dann so bestimmt, dass das mit dem Modell berechnete Nachfrageverhalten möglichst gut mit den gegebenen Informationen übereinstimmt. Da die Informationen über das Nachfrageverhalten im Allgemeinen aggregiert über alle OD Paare gesammelt werden, sind die so bestimmten Parameter unabhängig von dem OD-Paar, vergleiche mit Maier und Weiss[18] und Ben-Akiva und Lerman [3]. Die Parameterbestimmung erfolgt meistens durch eine Maximum-Likelihood-Schätzung, siehe Maier und Weiss[18] und Ben-Akiva und Lerman [3]. Damit kann dann außerdem ein Fehler angegeben werden, der bei der „Vorhersage“ des Nachfrageverhaltens auftritt.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir ein Fahrpreisplanungsmodell zur Optimierung der Einnahmen eines öffentlichen Verkehrsunternehmens entwickelt. Wir haben gesehen, dass das daraus entstandene Fahrpreisplanungsproblem in seiner allgemeinen Form das Problem der quadratischen Programmierung als Spezialfall enthält und damit NP-schwer ist.

Die Schwierigkeit bei unserem Fahrpreisplanungsmodell besteht darin, eine Nachfragefunktion zu finden, die die Realität möglichst genau abbildet. Wir haben hierbei zwei Wege verfolgt:

Zuerst haben wir die Möglichkeit untersucht, mit einer elementaren Funktion die Nachfragefunktion zu modellieren. Dies diente in erster Linie zur Veranschaulichung unseres Fahrpreisplanungsproblems und zum Testen der Berechenbarkeit. Wir verwendeten hierfür streng monoton fallende Funktionen mit linearem, quadratischem und exponentiellem Verhalten. Die Berechnung von Beispielen verlief ohne Probleme. Allerdings konnte mit dieser Modellierung nur eine Reisealternative bzw. nur eine Ticketart betrachtet werden. Insgesamt ist damit die Verwendung von elementaren Funktionen als Modell einer Nachfragefunktion zu ungenau.

Als zweiten Weg führten wir Modelle diskreter Entscheidungen ein. Wir betrachteten eine Menge von Alternativen, z. B. Auto, Einzelticket, Monats-ticket. Die Grundlage ist, dass sich ein Passagier für die Alternative entscheidet, die für ihn den größten Nutzen hat. In unserer Modellierung hängt der Nutzen immer vom Fahrpreis ab. Damit konnten wir die für unser Modell wichtige Nachfragefunktion aus einem Entscheidungsmodell herleiten. Wir haben gesehen, dass die Verwendung eines Zufallsnutzens die Berechnung stark vereinfacht. Außerdem wird mit einem Zufallsnutzen modelliert, dass nicht alle Verkehrsteilnehmer rein rational handeln. In dem Fall kann nur die Wahrscheinlichkeit angegeben werden, mit der sich ein Passagier für eine Alternative entscheidet. Somit gibt die Nachfragefunktion eine erwartete

Nachfrage an. Zur Berechnung der Auswahlwahrscheinlichkeit verwendeten wir das Logit Modell.

Da mit dieser Modellierung der Nachfrage sehr viele Aspekte der Verkehrsmittelwahl berücksichtigt werden können, haben wir für unser Fahrpreisplanungsmodell eine recht praxisnahe Modellierung gefunden. Wichtig ist, dass die Parameter des Modells mit Daten über das Nachfrageverhalten der Passagiere geschätzt werden können.

Ein nächster Schritt wäre, komplexere Preissysteme zu betrachten, z. B. mehr als zwei Ticketarten und mehr als zwei Preisvariablen in die Betrachtungen einbeziehen oder nach Personengruppen, Tageszeit oder OD-Paaren zu unterscheiden. Weiterhin könnten aggregierte Entscheidungen zugelassen werden, da die Passagiere meistens zwischen mehreren OD-Paaren unterwegs sind. Gleichzeitig müsste an der Berechnung bzw. Lösung des Fahrpreisplanungsproblems gearbeitet werden. Die Berechnung der hier vorgestellten Beispiele sind auf recht elementarem Weg erfolgt.

Denkbar wäre auch die Einbeziehung von Kosten in das Modell, indem die einzusetzende Kapazität abhängig von der erwarteten Nachfrage berechnet wird. Darüberhinaus könnten auch Fahrplan und Linienangebot variabel gestaltet werden und eine integrierte Optimierung über Preise, Taktzeit und Linienangebot durchgeführt werden. Wichtig hierbei ist wieder, die Auswirkungen auf das Nachfrageverhalten zu schätzen.

Insgesamt kann mit dem Fahrpreisplanungsmodell unter Einbeziehung von Entscheidungsmodellen eine differenzierte Preisbetrachtung durchgeführt werden. Erste Beispiele dazu wurden in Kapitel 7.3 vorgestellt. Es ist denkbar, das Modell als Planungshilfe für die Bestimmung der Preise in der Praxis zu verwenden. Durch eine Weiterentwicklung der Beispiele bzw. des Modells könnte seine praktische Relevanz noch vergrößert und erweitert werden.

Anhang A

Häufig verwendete Notation

$G = (V, E)$	Graph des öffentlichen Verkehrsnetzes
(s, t)	OD-Paar
\mathcal{D}	Menge der OD-Paare
\mathcal{R}_{st}	Menge der Reisealternativen für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$
$\mathbf{p} := (p_1 \dots, p_n)^T$	Preisvariablenvektor als Spaltenvektor
$f_{st}^i(\mathbf{p})$	Fahrpreisfunktion für OD-Paar (s, t) und Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$
$x_{st}^i(\mathbf{p})$	Nachfragefunktion für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ und Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ abhängig von den Preisvariablen
$\tilde{x}_{st}^i(\mathbf{f}_{st}(\mathbf{p}))$	Nachfragefunktion für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ und Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$ abhängig von den Fahrpreisen
$e_{st}^i(\mathbf{p})$	Einnahmefunktion für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ und Reisealternative $i \in \mathcal{R}_{st}$
$e_{st}(\mathbf{p})$	Einnahmefunktion für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ und alle Reisealternativen \mathcal{R}_{st}
$e(\mathbf{p})$	Einnahmefunktion über alle OD-Paare und alle Reisealternativen
e	Gesamteinnahmen
x	Gesamtnachfrage
g_{st}	gegebener Preis auf OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$
o_{st}^A	Anzahl Reisender im Individualverkehr auf OD Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$

o_{st}^B	Anzahl Reisender mit öffentlichen Verkehrsmitteln auf OD Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ (auf die Indizierung B wird verzichtet, wenn klar ist, dass es sich um den öffentlichen Verkehr handelt)
o_{st}^g	Gesamtanzahl (Individual- (IV) und öffentlicher Verkehr (OV)) Reisender von s nach t
ℓ_{st}^A	Abstand zwischen OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ im IV-Netz
ℓ_{st}^B	Abstand zwischen OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ im OV-Netz (auf die Indizierung B wird verzichtet, wenn klar ist, dass es sich um den öffentlichen Verkehr handelt)
z_{st}^A	Fahrzeit für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ im IV-Netz
z_{st}^B	Fahrzeit für OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ im OV-Netz
ϵ	Preiselastizität der Nachfrage
$\mathcal{E}(p)$	Funktion der Preiselastizität abhängig von dem Preis
$A = \{a_1, \dots, a_I\}$	Alternativenmenge
$U^a = V^a + \nu^a$	Nutzen der Alternative $a \in A$
V^a	deterministischer Nutzen der Alternative $a \in A$
ν^a	zufälliger Nutzen der Alternative $a \in A$ (oder Störterm in der Nutzenfunktion)
μ	Skalierungsparameter des zufälligen Nutzens ν^a
η	Lageparameter des zufälligen Nutzens ν^a
P^a	Auswahlwahrscheinlichkeit für Alternative $a \in A$
T	Zeitraum
Y_{st}	Zufallsvariable für die Anzahl der Fahrten eines Passagiers in T
Z_{st}^a	erwartete Anzahl der Passagiere, die auf OD-Paar $(s, t) \in \mathcal{D}$ Verkehrsmittelalternative $a \in A$ wählen
α_{st}, β_{st}	Parameter von elementaren Funktionen (als Modell für Nachfragefunktionen)

γ	Parameter zur Kalibrierung der elementaren Funktionen
q_F	Parameter für die fixen Autokosten im Monat
q_V	Parameter für die variablen Autokosten pro Kilometer
δ_1	Parameter zur Gewichtung des Fahrpreises in der Nutzenfunktion
δ_2	Parameter zur Gewichtung der Fahrzeit in der Nutzenfunktion

Anhang B

Berechnungsbeispiel mit Matlab

In diesem Abschnitt wird die Optimierung mit Matlab am Beispiel des Bahnkarten- und Standardtickets (siehe Abschnitt 7.3.3) erläutert. Dazu betrachten wir das Matlab-file, das die Einnahmen für einen gegebenen Preisvariablenvektor p berechnet:

```
function f = StandardBahnkart_Einnahmen(p)

% Berechnet fuer die Alternative Standardticket, Bahnkarten-
% ticket und Auto die Einnahmen nach den Grundannahmen, die
% fuer das Logit Modell gelten.
% Die Nutzenfunktion beinhaltet die Preise und die Fahrzeit
% der Alternativen
%
% p(1) ist der Preis der Bahnkarte,
% p(2) ist der Kilometerpreis
% Es werden hier die negativen Einnahmen betrachtet!!

global n_od; % OD-Matrix fuer den gesamten Verkehr
global l_A; % Laengenmatrix fuer den Autoverkehr
global l_B; % Laengenmatrix fuer den Bahnverkehr
global z_A; % Fahrzeitmatrix fuer den Autoverkehr
global z_B; % Fahrzeitmatrix fuer den Bahnverkehr

global v; % v(i) Wahrscheinlichkeit, dass im
          % Monat i Fahrten unternommen werden.
```

```

global PF;      % Autofixkosten pro Monat
global PV;      % variable Autokosten pro Kilometer
global mu;      % Skalierungsparameter der Gumbel-
                % Verteilung

N=60;          % Hoechstanzahl der unternommenen Fahrten
                % im Monat
se=length(n_od); % Anzahl der Haltestellen/Stationen

f=0; % Einnahmen

for i=1:se
    for j=1:se
        for k=1:N
            f=f-n_od(i,j)*
                ((exp(mu*(1500-(p(1)+p(2)/2*l_B(i,j)*k+z_B(i,j)*k*0.1)))*
                 (p(1)+p(2)/2*l_B(i,j)*k)+p(2)*l_B(i,j)*k*
                 exp(mu*(1500-(p(2)*l_B(i,j)*k+z_B(i,j)*k*0.1))))/
                 (exp(mu*(1500-(p(1)+p(2)/2*l_B(i,j)*k+z_B(i,j)*k*0.1)))+
                 exp(mu*(1500-(p(2)*l_B(i,j)*k+z_B(i,j)*k*0.1)))+
                 exp(mu*(1500-(PF+l_A(i,j)*PV*k+z_A(i,j)*k*0.1)))).*
                 v(k) );
        end
    end
end
end

```

Um Berechnungen für Abschnitt 7.3.3 durchführen zu können, müssen zunächst die Daten für die Niederlande geladen werden sowie die Parameter μ , PF und PV festgelegt werden.

Der Aufruf

```
>>[p_opt,e]=fminunc(@StandardBahnkart_Einnahmen,[1,1])
```

startet das Minimierungsverfahren, das eine Quasi Newton Methode verwendet, mit den Startwert [1, 1].

Der Aufruf

```
>>[p_opt,e]=fminsearch(@StandardBahnkart_Einnahmen,[1,1])
```

startet das Minimierungsverfahren, das die Nelder Mead Methode verwendet, mit den Startwert [1, 1].

In beiden Fällen wird der berechnete optimale Preisvariablenvektor p_{opt} und der (negative) Wert der Einnahmefunktion e zurückgegeben.

Literaturverzeichnis

- [1] Alt, Walter: *Nichtlineare Optimierung*. Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2002.
- [2] Baum, Herbert J.: *Free Public Transport*. Journal of Transport Economics and Policy, 7:3–19, 1973.
- [3] Ben-Akiva, Moshe and Steven R. Lerman: *Discrete Choice Analysis: Theory and Application to Travel Demand*. MIT Press, Cambridge, 2. edition, 1985.
- [4] Cerwenka, Peter: *Glanz und Elend der Elastizität*. Der Nahverkehr, 6:28–33, 2002.
- [5] Cezanne, Wolfgang: *Allgemeine Volkswirtschaftslehre*. Oldenbourg, München, 5. Auflage, 2002.
- [6] Ciancimino, A., G. Inzerillo, S. Lucidi, and L. Palagi: *A Mathematical Programming Approach for the Solution of the Railway Yield Management Problem*. Transportation Science, 33(2):168–179, 1999.
- [7] Curtin, John F.: *Effect of Fares on Transit Riding*. Highway Research Record 213, 1968.
- [8] De Borger, Bruno, Inge Mayeres, Stef Proost, and Sandra Wouters: *Optimal Pricing of Urban Passenger Transport, A Simulation Exercise for Belgium*. Journal of Transport Economics and Policy, 30(1):31–54, 1996.
- [9] Engel, Robert: *E-Ticket: Vision und Realität*. Der Nahverkehr, 3:107–109, 2001.
- [10] GAMS, Michael Bussieck: *lop.gms: Line Optimization*. <http://www.gams.com/modlib/libhtml/lop.htm>.
- [11] Garey, Michael R. and David S. Johnson: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, 1979.

- [12] Grünbaum, Branko: *Convex Polytopes*. Springer-Verlag, New York, 2. edition, 2003.
- [13] Gutknecht, Rudolf: *Nachfrageelastizitäten bei Fahrpreis- und Angebotsänderungen*. Verkehr und Technik, 4:157–161, 1986.
- [14] Hamacher, Horst W. and Anita Schöbel: *On Fair Zone Design in Public Transportation*. Lecture Notes in Economics in Mathematical Systems, pages 8–22, 1995.
- [15] Hamacher, Horst W. and Anita Schöbel: *Design of Zone Tariff System in Public Transportation*. Berichte des Fraunhofer Institut Techno- und Wirtschaftsmathematik, 21, 2001.
- [16] Kocur, George and Chris Hendrickson: *Design of Local Bus Service with Demand Equilibration*. Transportation Science, 16(2):149–170, 1982.
- [17] Litman, Todd: *Transit Price Elasticities and Cross-Elasticities*. Journal of Public Transportation, 7(2):37–58, 2004.
- [18] Maier, Gunther und Peter Weiss: *Modelle diskreter Entscheidungen*. Springer-Verlag, Wien, 1990.
- [19] McGill, Jeffrey I. and Garret J. van Ryzin: *Revenue Management: Research Overview and Prospects*. Transportation Science, 33(2):233–256, 1999.
- [20] Nordhaus, William D. und Paul A. Samuelson: *Volkswirtschaftslehre I Grundlagen der Makro- und Mikroökonomie*. Bund-Verlag, Köln, 8. Auflage, 1987.
- [21] Pedersen, Pål Andreas: *On the Optimal Fare Policies in Urban Transportation*. Transportation Research Part B, 33(37):423–435, 2003.
- [22] Siebert, Horst: *Einführung in die Volkswirtschaftslehre*. Kohlhammer, Stuttgart, 12. Auflage, 1996.
- [23] Storchmann, Karl-Heinz: *Das Defizit im öffentlichen Personennahverkehr in Theorie und Empirie*. Duncker & Humblot GmbH, Berlin, 1999.
- [24] Storchmann, Karl: *Externalities by Automobiles and Fare-Free Transit in Germany - A Paradigm Shift?* Journal of Public Transportation, 6(4):89–105, 2003.
- [25] The Mathworks: *Matlab*. <http://www.mathworks.de>.
- [26] Umwelt- und Prognose- Institut e.V.: *Tarifsystem der Bahn; Die Flexibilität der Deutschen Bahn*. <http://www.upi-institut.de/TarifsystemBahn.htm>.

- [27] VDI Nachrichten, Jörg Weber: *Bus und Bahn zum Nulltarif*. http://www.bics.de/son/verkehr/presse/1998_1/v1481_19.htm, 1998.
- [28] VDV, Verband Deutscher Verkehrsunternehmen: *Elektronisches Fahrgeldmanagement EFM*. <http://www.vdv.de>.
- [29] Walther, Klaus: *Der Preiselastizitätsfaktor im ÖPNV und seine Bestimmungsgroßen*. Der Nahverkehr, 1-2:33–36, 1993.
- [30] Wied-Nebbeling, Susanne: *Markt- und Preistheorie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 1997.
- [31] YU, Gang: *Operations Research in the Airline Industry*. Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, 1. edition, 1998.
- [32] Zuse Institut Berlin: *Strategic Planning in Public Transport; Matheon*. <http://www.zib.de/Optimization/Projects/Traffic/Matheon-B1>.
- [33] *Routing Planer*. <http://www.de.map24.com>.
- [34] *Münchner Verkehrs- und Tarifverbund*. <http://www.mvv-muenchen.de/de/home/fahrgastinformation/tickets-preise/index.html>.
- [35] *Nahverkehrsplan des Landes Berlin Fortschreibung 2000/2001 und 2004*. http://www.stadtentwicklung.berlin.de/verkehr/nahverkehrsplan/download/nvp_text.pdf.
- [36] *Die Beförderungsbedingungen der DB*. <http://pep.bahntarif.de>.
- [37] *Reisadvies*. <http://www.9292ov.nl>.
- [38] *Verkehrsverbund Berlin Brandenburg; Tarife und Tickets*. <http://www.vbb-online.de>.

Die selbständige und eigenhändige Anfertigung dieser Arbeit versichere
ich an Eides statt.

Berlin, 18. Juli 2005

Marika Neumann

