Gitterpackungen konvexer Körper

Utz-Uwe Haus

Diplomarbeit
bei Professor M. Grötschel
an der Technischen Universität Berlin

12. April 1999

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die dieser Arbeit zugrundeliegende Fragestellung formulierte Minkowski im Jahre 1904 wie folgt[1]:

> *„Gegeben ist ein beliebiger Grundkörper K. Lauter mit K kongruente und parallel orientierte Körper in unendlicher Anzahl sollen im Raume in gitterförmiger Anordnung derart gelagert werden, daß keine zwei der Körper ineinander eindringen und daß dabei der von den Körpern erfüllte Teil des Raumes gegenüber dem von ihnen freigelassenen möglichst groß ist."*

Dies ist kein neues Problem in der Mathematik: T. Hariot scheint der Erste gewesen zu sein, der sich, als mathematischer Assistent von Sir Walter Raleigh, damit beschäftigte, eine Formel für die Anzahl von Kanonenkugeln in einem regelmäßig angeordneten Haufen zu finden. Im Jahre 1591 verfaßte er eine Tabelle, aus der sich die Anzahl in Abhängigkeit von der Anordnung ablesen ließ. Dabei unterschied Hariot erstmals zwischen flächenzentrierter kubischer und hexagonaler Packung. Kepler beschrieb 1611 die flächenzentrierte kubische Kugelpackung und behauptete, daß durch diese die dichteste mögliche Anordnung überhaupt gegeben sei. Diese als *Keplersche Vermutung* bekannte Behauptung wurde erst in den letzten Jahren von Hales bewiesen [12]; sie ist auch Teil des *18. Hilbertschen Problems*. Auch Newton und Gregory beschäftigten sich mit Kugelpackungen; es ist ihr Disput darüber überliefert, wieviele Kugeln von gleichem Radius eine vorgegebene höchstens gleichzeitig berühren können (*kissing number problem*). Newton behauptete, es seien höchstens 12, Gregory hielt 13 für möglich. Daß Newton recht hatte, wurde erstmals von B.L. van der Waerden und Schütte in [25] vollständig bewiesen.

Nach Lagrange, der die Theorie der Reduktion von binären quadratischen Formen entwickelte [18], und Gauss [10], der den Begriff des Gitters einführte, legte Minkowski am Anfang unseres Jahrhunderts mit seinem Artikel „Dichteste gitterförmige Lagerung

[1] vgl. [20]

konvexer Körper“ [20] die Grundlage der modernen Theorie der Gitterpackungen. Die darin angegebene Methode zur Bestimmung einer dichtesten Gitterpackung in Dimension 3 wurde für einzelne Körper im dreidimensionalen Raum erfolgreich angewandt, sie ist aber sehr rechenaufwendig und für komplizierte Körper manuell nicht zu bewältigen. Ein großer Teil der vorliegenden Diplomarbeit ist der Analyse der Ideen dieses Artikels gewidmet. Nach einer Einleitung und der Präzisierung des Begriffs „Packung“ findet sich in Kapitel 3 eine Übersicht über die Themen der folgenden Kapitel. Den Abschluß bildet die Formulierung eines Algorithmus, der zu einem gegebenen Polytop in Dimension 3 eine Gitterpackung bestimmt, die dieses bestmöglich packt.

Ich möchte mich an dieser Stelle bei Professor Grötschel und dem Konrad-Zuse-Zentrum Berlin für die hervorragenden Arbeitsbedingungen bedanken. Desweiteren gilt mein Dank PD Dr. Martin Henk für die hilfreiche und ermunternde Unterstützung, der mit seiner Vorlesung mein Interesse an der Konvexgeometrie weckte.

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Mathematische Grundlagen

Im folgenden soll ein kurzer Abriß der verwendeten mathematischen Hilfsmittel, vor allem der verwendeten Definitionen und wichtigen Sätze, gegeben werden. Eine Liste der Symbole und Bezeichnungen findet sich im Anhang.

1.1.1 Gitter

Definition 1.1. Zu einer Menge $V = \{x_1, \dots, x_d\} \subset \mathbb{R}^d$ von d linear unabhängigen Vektoren definieren wir das *Gitter* $\Lambda(V)$ oder kurz Λ als

$$\Lambda = \Lambda(V) := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i x_i, \qquad \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Definition 1.2. Eine Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ heißt *Basis* des Gitters $\Lambda(V)$, wenn $\Lambda(V) = \Lambda(B)$ und $\operatorname{card}(B) = d$.

Im folgenden wird mit B sowohl die Menge der Basisvektoren $\{b_1, \dots, b_d\}$, als auch die Matrix mit den Spalten $b_1, \dots, b_d$, sowie auch die durch diese Matrix induzierte Abbildung bezeichnet.

Wenn die Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_d$ des $\mathbb{R}^d$ eine Basis des Gitters Λ bilden, so nennen wir Λ das *Standardgitter*. Es wird mit $\mathbb{Z}^d$ bezeichnet.

Ist $\Lambda(B)$ ein Gitter mit Basis B, so ist $\Lambda = B\mathbb{Z}^d$, und daher bildet es eine diskrete Untergruppe des $\mathbb{R}^d$.

Satz und Definition 1.1. *Sei Λ ein Gitter mit Basis $A = (a_1, \dots, a_d)$, und seien d Punkte $b_1, \dots, b_d$ von Λ gegeben. Dann ist $B = (b_1, \dots, b_d)$ eine Basis von Λ genau dann, wenn es eine Matrix U mit ganzzahligen Einträgen gibt, so daß*

$$|\det U| = 1 \qquad \textit{und} \qquad B = AU$$

gilt.

Eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen und Determinante vom Betrag 1 *heißt* unimodular.

Beweis. Es ist $\Lambda = A\mathbb{Z}^d$. Ist auch B Basis von Λ, so gilt gleichzeitig $\Lambda = B\mathbb{Z}^d$. Daher ist, wenn man $U := A^{-1}B$ setzt, $U\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d$ und $U^{-1}\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d$. Folglich sind sowohl U als auch U^{-1} ganzzahlige Matrizen, und es muß $\det U = \pm 1$ gelten.

Falls umgekehrt eine unimodulare Matrix U mit $B = AU$ existiert, dann ist $U\mathbb{Z}^d = \mathbb{Z}^d$, weil sowohl U als auch U^{-1} ganzzahlige Matrizen sind. Es folgt $B\mathbb{Z}^d = AU\mathbb{Z}^d = A\mathbb{Z}^d = \Lambda$, so daß B Basis von Λ ist. □

Definition 1.3. Sei $\Lambda = B\mathbb{Z}^d$ ein Gitter mit Basis B. Das (halb-offene) Parallelepiped

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, x = \sum_{i=1}^{d} t_i b_i \text{ mit } 0 \le t_i < 1 \right\}$$

heißt *Grundparallelepiped* des Gitters Λ, sein Volumen $|\det(B)|$ heißt *Gitterdeterminante.*

Da alle Basen eines Gitters durch unimodulare Transformationen ineinander überführt werden können, ist die Definition der Gitterdeterminante unabhängig von der Basis.

Satz 1.2 (Auswahlsatz von Mahler). *Eine Menge $\mathfrak{L}$ von Gittern heiße* beschränkt*, wenn jedes Gitter $\Lambda \in \mathfrak{L}$ eine Basis mit Basisvektoren in einer gewissen fest gewählten Kugel um* 0 *besitzt, für die* $\det(\Lambda) \ge \sigma > 0$ *ist. Bezüglich der durch die Maximumsnorm auf der Menge aller Gitter induzierten Topologie gilt dann:*
Jede beschränkte Folge von Gittern enthält eine konvergente Teilfolge.

Ein Beweis dieses Satzes findet sich in [11], 17.5 Thm. 2.

1.1.2 Konvexe Körper

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}^d$ die Menge der nichtleeren, konvexen, kompakten (also beschränkten abgeschlossenen) Mengen im $\mathbb{R}^d$. $\mathfrak{K}^d$ heißt kurz auch *Raum der konvexen Körper.* Die Menge derjenigen konvexen Körper in $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, die zentralsymmetrisch mit Mittelpunkt 0 sind, das heißt $x \in \mathrm{K} \Rightarrow -x \in \mathrm{K}$, bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}^d_0$.

Definition 1.4. Für zwei Mengen X und Y bezeichnen wir mit $X + Y$ die Menge aller Summen von Punkten aus X und Y, also

$$X + Y := \{x + y \,|x \in X,\ y \in Y\}.$$

$X + Y$ heißt *Minkowskisumme* der beiden Mengen.
Als Notationsvereinfachung wird bei einelementigen Mengen einfach $x + Y$ statt $\{x\} + Y$ geschrieben.
Desweiteren wird die Dilatation mit einem reellen Faktor α mit

$$\alpha X := \{\alpha x \,|x \in X\}$$

notiert.

Im allgemeinen gilt nicht $\lambda X + \mu X = (\lambda + \mu)X$, sondern nur $\lambda X + \mu X \supset (\lambda + \mu)X$. Ist jedoch $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, so ist $\lambda\mathrm{K} + \mu\mathrm{K} = (\lambda + \mu)\mathrm{K}$ für jedes Paar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu > 0$ (dies könnte sogar als Definition für Konvexität benutzt werden).

Definition 1.5. Das d-dimensionale Lebesguesche Maß einer Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ wird mit $\mathrm{Vol}\,(M)$ bezeichnet.

Satz 1.3 (Brunn-Minkowski). *Sind* $\mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1 \in \mathfrak{K}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *mit* $0 \leq \lambda \leq 1$ *und* $\mathrm{K}_\lambda := (1-\lambda)\mathrm{K}_0 + \lambda\mathrm{K}_1$, *so ist*

$$\sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K}_\lambda)} \geq (1-\lambda)\sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K}_0)} + \lambda\sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K}_1)}.$$

Definition 1.6. Zu einem konvexen Körper $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ definieren wir den *Differenzkörper* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ durch die Minkowskisumme

$$\mathcal{D}\mathrm{K} = \tfrac{1}{2}\Big(\mathrm{K} + (-\mathrm{K})\Big).$$

Lemma und Definition 1.1. *Der Differenzkörper* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ *ist konvex und* zentralsymmetrisch, *d.h.* $0 \in \mathcal{D}\mathrm{K}$, *und es gilt* $x \in \mathcal{D}\mathrm{K} \Rightarrow -x \in \mathcal{D}\mathrm{K}$.

Beweis. Offenbar genügt es, den Beweis für den Körper $\mathrm{K} - \mathrm{K} = 2\mathcal{D}\mathrm{K}$ zu führen.

Seien $x = k_1 - k_2$ und $y = l_1 - l_2$ mit $k_1, k_2, l_1, l_2 \in \mathrm{K}$ zwei beliebige Punkte in $2\mathcal{D}\mathrm{K}$. Dann ist auch $-x = k_2 - k_1 \in 2\mathcal{D}\mathrm{K}$, und die Strecke zwischen x und y liegt ebenfalls in $2\mathcal{D}\mathrm{K}$:

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \Big(\lambda k_1 + (1-\lambda)l_1\Big) - \Big(\lambda k_2 + (1-\lambda)l_2\Big) \in 2\mathcal{D}\mathrm{K} \qquad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

□

Lemma 1.2. *Das Volumen des Differenzkörpers* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ *ist immer größer oder gleich dem Volumen von* K.

Beweis. Man benutzt den Satz von Brunn-Minkowski (Satz 1.3) mit $\lambda = \frac{1}{2}, \mathrm{K}_0 = \mathrm{K}, \mathrm{K}_1 = -\mathrm{K}, \mathrm{K}_\lambda = \mathcal{D}\mathrm{K}$ und erhält

$$\sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})} = \sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,\left(K_{1/2}\right)} \geq (1-\tfrac{1}{2})\sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(K_0)} + \tfrac{1}{2}\sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(K_1)} = \sqrt[d]{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}.$$

□

Der letzte Satz besagt, daß das Verhältnis $\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K}) \,/\, \mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})$ nach oben durch 1 beschränkt ist; auch nach unten ist eine Abschätzung möglich:

Satz 1.4 (Rogers-Shephard). *Sei* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, *dann gilt*

$$\frac{2^d}{\binom{2d}{d}} \leq \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})} \leq 1,$$

wobei in der linken Ungleichung Gleichheit nur gilt, wenn K *ein Simplex ist, und in der rechten Ungleichung nur, wenn* K *zentralsymmetrisch ist.*

Dieses Resultat findet sich in [24] und in [23] S. 37ff.

Lemma und Definition 1.3. *Jeder zentralsymmetrische konvexe Körper* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ *kann mit Hilfe seiner* Distanzfunktion

$$F_{\mathrm{K}}(x) := \min \{\lambda \geq 0 \mid \lambda \in \mathbb{R}, x \in \lambda \mathrm{K}\}$$

beschrieben werden als $\mathrm{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid F_{\mathrm{K}}(x) \leq 1\right\}$.

Für die Distanzfunktion gelten:

$$F_{\mathrm{K}}(tx) = tF_{\mathrm{K}}(x) \qquad t \in \mathbb{R}_{>0}, x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

$$F_{\mathrm{K}}(-x) = F_{\mathrm{K}}(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.2}$$

$$F_{\mathrm{K}}(x) + F_{\mathrm{K}}(y) \geq F_{\mathrm{K}}(x+y) \qquad x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

Die Eigenschaften der Distanzfunktion folgen der Reihe nach daraus, daß $0 \in \mathrm{K}$ gilt, daß K zentralsymmetrisch ist, und aus der Konvexität von K.

Definition 1.7. Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ bezeichne $\mathrm{lin}\,(M)$ die *lineare*, $\mathrm{aff}\,(M)$ die *affine* und $\mathrm{conv}\,(M)$ die *konvexe Hülle* von M.
Die Dimension einer Menge M definieren wir als die Dimension der affinen Hülle $\mathrm{aff}\,(M)$.
Die d-dimensionale (abgeschlossene) Vollkugel um x vom Radius r wird mit $\mathcal{B}_r^d\,(x)$ bezeichnet.

Definition 1.8. $x \in \mathbb{R}^d$ heißt *relativ innerer Punkt* von $M \subset \mathbb{R}^d$, falls es ein $r > 0$ gibt, so daß

$$\mathcal{B}_r^d\,(x) \cap \mathrm{aff}\,(M) \ \subset \ M$$

gilt. Die Menge aller dieser Punkte wird mit $\mathrm{relint}\,(M)$ bezeichnet.

Definition 1.9. Ist die Menge M von endlicher Kardinalität, so heißt $\mathrm{conv}\,(M)$ *(konvexes) Polytop.*

Satz 1.5. *Sei* $P = \mathrm{conv}\,(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathbb{R}^d$ *ein Polytop, dann gilt:*

$$x \in \mathrm{relint}\,(P) \ \Leftrightarrow \ \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \ \mathit{mit} \ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \ \mathit{und} \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\,.$$

1.1.3 Trenn- und Stützeigenschaften

Definition 1.10.

1. Für $a \in \mathbb{R}^d, a \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$ seien

$$H(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,|a^\intercal x = b\right\},$$
$$H^+(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,|a^\intercal x \geq b\right\},$$
$$H^-(a,b) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,|a^\intercal x \leq b\right\}.$$

   $H(a,b)$ heißt *Hyperebene mit Normalenvektor* a, und $H^+(a,b)$, $H^-(a,b)$ sind die zugehörigen abgeschlossenen Halbräume.

2. Für $A, B \subset \mathbb{R}^d$ heißt $H(a, b)$ *Trennebene*, falls gilt:

$$A \subset H^+(a, b) \quad \text{und} \quad B \subset H^-(a, b).$$

Gilt zusätzlich, daß $A \cap H(a, b) = \emptyset$ und $B \cap H(a, b) = \emptyset$, so heißt $H(a, b)$ ***echte*** oder ***strenge*** Trennebene.

Satz 1.6. *Seien* $\mathrm{K}, \mathrm{L} \in \mathfrak{K}^d$. *Ist* $\mathrm{int}\,(\mathrm{K}) \neq \emptyset$ *und* $L \cap \mathrm{int}\,(\mathrm{K}) = \emptyset$, *so existiert für* K *und* L *eine Trennebene.*

Satz 1.7. *Seien* $\mathrm{K}, \mathrm{L} \in \mathfrak{K}^d$, $\mathrm{K}, \mathrm{L} \neq \emptyset$. *Dann gibt es eine echte Trennebene* $H(a, b)$ *für* K *und* L *genau dann, wenn* $\mathrm{K} \cap \mathrm{L} = \emptyset$.

Definition 1.11. Sei $K \subset \mathbb{R}^d$. Die Hyperebene $H(a, b)$ heißt *Stütz(hyper)ebene* von K, falls gilt:

$$K \cap H(a, b) \neq \emptyset$$

und

$$K \subset H^+(a, b) \text{ oder } K \subset H^-(a, b).$$

Für $K \subset H^-(a, b)$ heißt a *äußerer Normalenvektor* von $H(a, b)$ bezüglich K.

Satz 1.8. *Sei* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$. K *ist der Durchschnitt aller Halbräume* $H^-(a, b)$, *die von Stüztebenen* $H(a, b)$ *an* K *mit* $\mathrm{K} \subset H^-(a, b)$ *bestimmt werden.*

Satz 1.9. *Durch jeden Randpunkt eines konvexen Körpers* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ *existiert eine Stützhyperebene.*

Definition 1.12. Sei $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ und H eine Stützebene. Dann heißt $F = \mathrm{K} \cap H$ *Seite von* K. 0-dimensionale Seiten heißen *Ecken*, 1-dimensionale Seiten heißen *Kanten*, $(\dim \mathrm{K} - 1)$-Seiten heißen *Facetten*.

Satz 1.10. *Jedes Polytop* $P = \mathrm{conv}\,(v_1, \ldots, v_n)$ *hat nur endlich viele Facetten und läßt sich daher als Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen.*

Für alle Sätze dieses Abschnitts finden sich Beweise in [6], Kapitel I.

Kapitel 2

Packungen

2.1 Zulässige und kritische Gitter, Packungsdichte

Wir wollen im folgenden die Begriffe definieren, die es ermöglichen, die im Vorwort formulierte Frage nach der Dichte einer Gitterpackung eines konvexen Körpers zu präzisieren.

Definition 2.1. Ein Gitter Λ heißt *zulässig für* den konvexen Körper $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, wenn

$$\Lambda \setminus \{0\} \cap \operatorname{int}(\mathrm{K}) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Die Größe

$$\Delta(\mathrm{K}) := \inf\Big\{\det \Lambda : \Lambda \text{ zulässig für K}\Big\}$$

heißt *kritische Determinante* des Körpers K.

Ein Gitter Λ, das für K zulässig ist, und für das $\det(\Lambda) = \Delta(\mathrm{K})$ gilt, heißt *kritisches Gitter*.

Bemerkung 2.1: Jeder konvexe Körper besitzt wenigstens ein kritisches Gitter (siehe 17.5 Thm. 9 in [11]).

Der folgende Satz zeigt, daß $\Delta(\mathrm{K})$ für einen gegebenen Körper nicht „zu groß“ und nicht „zu klein“ sein kann:

Satz 2.1 (Minkowski-Hlawka). *Ist* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ *ein zentralsymmetrischer konvexer Körper, so ist*

$$2\zeta(d) \leq \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\Delta(\mathrm{K})} \leq 2^d,$$

wobei $\zeta(d) = \sum_{i=1}^{\infty} i^{-d}$ *die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet.*

Ein Beweis hierfür findet sich zum Beispiel in [11] 19.2 Thm. 3. Die untere Abschätzung ist verschiedentlich noch etwas verfeinert worden, aber alle Abschätzungen blieben in der gleichen Größenordnung.

Definition 2.2. Eine Familie von Teilmengen $\{S_i \subset \mathbb{R}^d \mid i \in I\}$ heißt *Packung*, wenn je zwei dieser Mengen sich nicht im Inneren schneiden, das heißt

$$\forall i, j \in I \text{ mit } i \neq j : \operatorname{int}(S_i) \cap \operatorname{int}(S_j) = \emptyset.$$

Wenn $I = \Lambda$ ein Gitter und die Packung $\{S_i \mid i \in I\} = \{S + p \mid p \in \Lambda\}$ ist, so nennen wir die Familie eine *Gitterpackung von* S, und das Gitter Λ heißt *Packungsgitter* für S.

Satz 2.2. *Sei* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$*. Ein Gitter* Λ *ist Packungsgitter für* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ *genau dann, wenn es zulässig für* $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ *ist.*

Beweis. Ist Λ nicht zulässig für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$, dann enthält $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ einen Gitterpunkt $x \neq 0$ im Inneren, also liegt $\frac{1}{2}x$ im Inneren von $\mathcal{D}\mathrm{K}$, und $-\frac{1}{2}x$ ebenfalls, da der Differenzkörper zentralsymmetrisch bezüglich 0 ist. Daher haben die beiden Körper $\mathcal{D}\mathrm{K}$ und $x + \mathcal{D}\mathrm{K}$ den Punkt $\frac{1}{2}x$ gemeinsam.

Für die andere Richtung des Beweises nehmen wir an, Λ sei kein Packungsgitter für $\mathcal{D}\mathrm{K}$: Dann findet man $x_1, x_2 \in \Lambda$ mit $x_1 \neq x_2$ und a, so daß $a \in x_1 + \mathrm{int}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})$ und $a \in x_2 + \mathrm{int}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})$ ist. Das heißt, es existieren $b_1, b_2 \in \mathrm{int}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})$ mit $a = b_1 + x_1 = b_2 + x_2$, also $x_1 - x_2 = b_2 - b_1$. Mit b_1 liegt wieder auch $-b_1$ im Inneren von $\mathcal{D}\mathrm{K}$, also liegt $x_1 - x_2 = b_2 + (-b_1) \in \mathrm{int}\,(\mathcal{D}\mathrm{K}) + \mathrm{int}\,(\mathcal{D}\mathrm{K}) \subset \mathrm{int}\,(2\mathcal{D}\mathrm{K})$, denn eine offene Umgebung U_ϵ von b_2 in K liefert eine offene Umgebung vom Radius ϵ um $(b_2 - b_1)$. Da aber $x_1 - x_2 \neq 0$ und auch Gitterpunkt ist, ist Λ nicht zulässig für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$. □

Satz 2.3. *Das Gitter* Λ *ist Packungsgitter für den konvexen Körper* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ *genau dann, wenn es für den zugehörigen Differenzkörper* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ *Packungsgitter ist.*

Beweis. Zunächst sei Λ Packungsgitter für K. Nach dem letzten Satz brauchen wir nur zu zeigen, daß Λ zulässig für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ ist, um zu beweisen, daß Λ Packungsgitter für $\mathcal{D}K$ ist. Sei also $g \in \Lambda$ beliebig, aber $g \neq 0$. Dann ist $\mathrm{int}\,(K) \cap \big(g + \mathrm{int}\,(K)\big) = \emptyset$, denn Λ packt K. Es existiert also eine durch c und a bestimmte Trennebene zwischen K und $g + \mathrm{K}$, so daß

$$\begin{aligned} & c^\intercal x \leq a && \text{für } x \in \mathrm{K} \\ \Rightarrow\quad & c^\intercal x \geq -a && \text{für } x \in -\mathrm{K} \end{aligned} \tag{2.2}$$

und

$$\begin{aligned} & c^\intercal x \geq a && \text{für } x \in g + \mathrm{K} \\ \Rightarrow\quad & c^\intercal (x + g) \geq a && \text{für } x \in \mathrm{K}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nun betrachten wir einen beliebigen Punkt p aus $\mathrm{K} - \mathrm{K}$. Um zu zeigen, daß Λ für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ zulässig ist, genügt es zu zeigen, daß $c^\intercal g \geq c^\intercal p$ gilt, denn dann ist g Randpunkt von $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ oder liegt außerhalb, und g war ein beliebiger Gitterpunkt außer 0. Aber $p = x - y$ mit $x, y \in \mathrm{K}$, also $c^\intercal(g - x + y) = c^\intercal(g + y) + c^\intercal(-x) \geq a - a = 0$ nach (2.2) und (2.3), und das bedeutet $c^\intercal g \geq c^\intercal(x - y) = c^\intercal p$.

Die andere Richtung des Satzes wird durch Kontraposition bewiesen: Wenn Λ kein Packungsgitter für K ist, so existieren $x, y \in \Lambda$, $x \neq y$, so daß $\big(x + \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\big) \cap \big(y + \mathrm{int}\,(\mathrm{K})\big) \neq \emptyset$ ist. Das heißt, es gibt $k, l \in \mathrm{int}\,(\mathrm{K})$ mit $x + k = y + l$. Gilt aber $x + k = y + l$, so ist $(x - y) = (l - k)$ ein Punkt im Inneren von $\mathrm{K} - \mathrm{K} = 2\mathcal{D}\mathrm{K}$. Damit ist aber Λ nicht mehr zulässig für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$, nach dem Satz 2.2 also kein Packungsgitter für $\mathcal{D}\mathrm{K}$. □

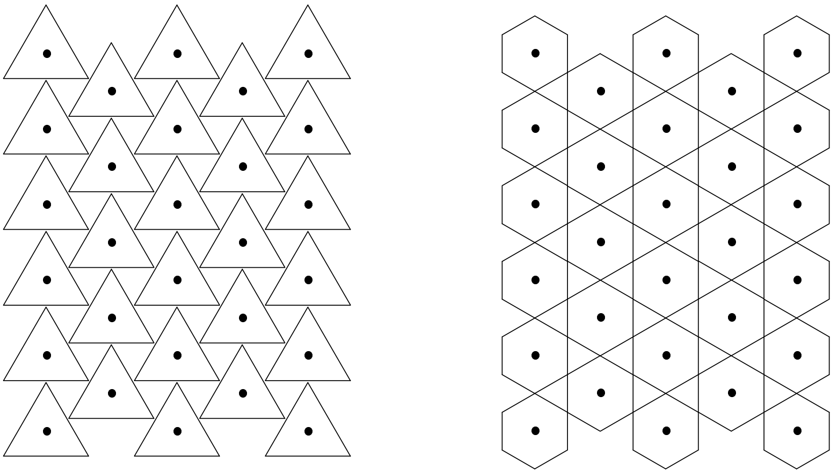

Abbildung 2.1: Packung von K und $\frac{1}{2}\big(\mathrm{K}-\mathrm{K}\big)$ bezüglich desselben Gitters

Die Aussage des letzten Satzes ist in Abbildung 2.1 für den Fall dargestellt, daß K ein gleichseitiges Dreieck in $d = 2$ ist. Der Differenzkörper ist hier ein regelmäßiges Sechseck.

Nun soll der Begriff der *Dichte* einer Gitterpackung definiert werden.

Definition und Satz 2.4. *Sei* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, Λ *ein Packungsgitter für* K, $t \in \mathbb{R}^d$ *ein beliebiger Vektor und* B *ein beliebiger beschränkter konvexer Körper, dessen Inkugelradius (d.h. der Radius der größten noch ganz in* B *liegenden Kugel) mit* $r(B)$ *bezeichnet werde. Dann sei*

$$n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t) := \mathrm{card}\left(\{p \mid p \in \Lambda + t \textit{ mit } K + p \subset B\}\right)$$

die Anzahl der in B *liegenden Gittertranslate von* $\mathrm{K} + t$, *und wir definieren*

$$\rho(\mathrm{K}, \Lambda, t) := \limsup_{r(B)\to\infty} \frac{n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t)\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}\,(B)}$$

als die Dichte der Gitterpackung. *Dabei soll* $r(B) \to \infty$ *bedeuten, daß* B *mit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *dilatiert wird, so daß der Inkugelradius* $r(\alpha B) \to \infty$ *strebt.*

Es gilt:

$$\lim_{r(B)\to\infty} \frac{n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t)\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}\,(B)} = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\det \Lambda}.$$

Beweis. Wir orientieren uns an [11], 20.1.

Sei C das Grundparallelepiped des Gitters Λ, und sei r_0 der Radius der kleinsten Kugel um 0, die K und C enthält, also

$$\mathrm{K}, C \subset \mathcal{B}^d_{r_0}(0)\,.$$

Es sei B so groß gewählt, daß $r(B) > 2r_0$ ist, und wir definieren $\theta := \frac{r_0}{r(B)}$.

Da $n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t)$ invariant unter gleichzeitiger Translation von B und t ist, kann B in den Koordinatenursprung bewegt werden, so daß $\mathcal{B}^d_{r(B)}(0) \subset B$ ist. Dann finden wir $C \subset \theta B$ und $\mathrm{K} \subset B$.

Es sei $X = \{x \mid x \in \Lambda + t, \mathrm{K} + x \subset B\}$. Dann ist $X \subset B$ nach Wahl von r_0. Daher gilt

$$\forall x \in X : C + x \subset C + B \subset \theta B + B = (1 + \theta)B.$$

Da $\{C + x \mid x \in \Lambda\}$ den Raum einfach überdeckt, überlappen sich die Mengen in $\{C + x \mid x \in X\}$ nicht, also ist

$$n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t) \leq \frac{\mathrm{Vol}\,((1+\theta)B)}{\mathrm{Vol}\,(C)} = (1+\theta)^d \frac{\mathrm{Vol}\,(B)}{\det \Lambda}. \tag{2.4}$$

Eine Abschätzung nach unten erhalten wir wie folgt: Sei $a \in (1 - 2\theta)B$ beliebig. Dann existiert ein $x^* \in \Lambda + t$, so daß $a \in C + x^*$ liegt. Dann ist aber

$$\begin{gathered} x^* \in a - C \subset (1 - 2\theta)B + \theta B = (1 - \theta)B \\ \mathrm{K} + x^* \subset \theta B + (1 - \theta)B) = B, \end{gathered}$$

also ist $x^* \in X$. Nun überdeckt aber $\{C + x \mid x \in X\}$ die Menge $(1 - 2\theta)B$, weil a beliebig war. Daher ist

$$n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t) \geq \frac{\mathrm{Vol}\,((1-2\theta)B)}{\mathrm{Vol}\,(C)} = (1-2\theta)^d \frac{\mathrm{Vol}\,(B)}{\det \Lambda}. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) folgt nach Multiplikation mit $\frac{\mathrm{Vol}(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}(B)}$

$$(1 - 2\tfrac{r_0}{r(B)})^d \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\det \Lambda} \leq \frac{n(B, \mathrm{K}, \Lambda, t)\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}\,(B)} \leq (1 + \tfrac{r_0}{r(B)})^d \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\det \Lambda},$$

woraus sich nach Grenzübergang $r(B) \to \infty$ die Behauptung ergibt. □

Bemerkung 2.2: Der vorangegangene Satz zeigt, daß die Dichte unter Translationen von Λ oder K invariant ist, weswegen der Parameter t auch weggelassen werden kann. Daher setzen wir

$$\delta(\mathrm{K}, \Lambda) := \rho(\mathrm{K}, \Lambda, t) = \tfrac{\mathrm{Vol}(\mathrm{K})}{\det \Lambda}.$$

Desweiteren ist die Dichte invariant unter nichtdegenerierten linearen Transformationen, denn ist A so eine Transformation, so gilt

$$\delta(A\mathrm{K}, A\Lambda) = \frac{\mathrm{Vol}\,(A\mathrm{K})}{\det A\Lambda} = \frac{|\det A|\,\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{|\det A| \det \Lambda} = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\det \Lambda} = \delta(\mathrm{K}, \Lambda).$$

δ und ρ sind also invariant unter nichtdegenerierten affinen Abbildungen.

Definition 2.3. Mit $\delta(\mathrm{K})$ bezeichnen wir die kleinste obere Schranke der Dichte aller Gitterpackungen[1] von $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, also

$$\delta(\mathrm{K}) = \sup\{\delta(\mathrm{K}, \Lambda) \mid \Lambda \text{ Packungsgitter für } \mathrm{K}\}.$$

Lemma 2.1. *Für jeden konvexen Körper* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ *ist*

$$\delta(\mathrm{K}) \leq 1,$$

und es existiert ein Packungsgitter Λ^*, *so daß* $\delta(\mathrm{K}) = \delta(\mathrm{K}, \Lambda^*)$ *ist.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus der Definition von ρ, denn $\frac{n(B,\mathrm{K},\Lambda,t)\,\mathrm{Vol}(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}(B)}$ ist immer höchstens 1, woran die Bildung von lim sup und sup nichts ändern.

Die Existenz einer Gitterpackung (K, Λ^*) mit $\delta(\mathrm{K}) = \delta(\mathrm{K}, \Lambda^*)$ folgt aus dem Auswahlsatz von Mahler, Satz 1.2. Insbesondere darf daher das Supremum in der Definition 2.3 durch ein Maximum ersetzt werden. □

Bemerkung 2.3: Aus der Tatsache, daß für jedes $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ immer $\delta(\mathrm{K}) \leq 1$ gilt, folgt wegen Satz 2.2 und Satz 2.3

$$\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K}) \leq 2^d \Delta(\mathrm{K}).$$

Dies ist gerade die obere Abschätzung aus dem Satz 2.1.

Satz 2.5. *Ist* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$, *so gilt die folgende Beziehung zwischen den dichtesten Gitterpackungen von* K *und* $\mathcal{D}\mathrm{K}$*:*

$$\delta(\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})}\delta(\mathcal{D}\mathrm{K}). \tag{2.6}$$

Beweis. Ein Gitter ist nach Satz 2.2 Packungsgitter für $\mathcal{D}\mathrm{K}$ gerade dann, wenn es zulässig für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ ist. Die Dichte einer Packung von $\mathcal{D}\mathrm{K}$ ist möglichst groß, wenn die Determinante des Packungsgitters klein wird. Ein zulässiges Gitter minimaler Determinante findet man aber gerade in einem kritischen Gitter. Daher ist

$$\delta(\mathcal{D}\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})}{\Delta(2\mathcal{D}\mathrm{K})}.$$

Weiterhin besagt Satz 2.3, daß jedes Packungsgitter für K auch eines für $\mathcal{D}\mathrm{K}$ ist und umgekehrt, also ist ein kritisches Gitter für $2\mathcal{D}\mathrm{K}$ auch für K optimales Packungsgitter, so daß

$$\delta(\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\Delta(2\mathcal{D}\mathrm{K})}$$

gilt. Setzt man beide Gleichungen zusammen, so erhält man die Behauptung

$$\delta(\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{\mathrm{Vol}\,(\mathcal{D}\mathrm{K})}\,\delta(\mathcal{D}\mathrm{K}).$$

□

[1] Vielfach wird in der Literatur hierfür die Bezeichnung δ_L gewählt; da hier nur von Gitterpackungen die Rede sein soll und daher keine anderen Packungsdichten auftreten werden, unterbleibt das Subscript.

Korollar 2.1. *Ist* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ *zentralsymmetrisch, so ist* $\mathcal{D}\mathrm{K} = \mathrm{K}$*, also gilt*

$$\delta(\mathrm{K}) = \frac{\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K})}{2^d \Delta(\mathrm{K})}.$$

Wie man sofort aus dem Satz von MINKOWSKI-HLAWKA *(Satz 2.1) unter Verwendung der ersten Gleichung erhält, gilt in diesem Fall*[2] *auch*

$$2^{1-d}\zeta(d) \leq \delta(\mathrm{K}),$$

wobei $\zeta(d) = \sum_{i=0}^{\infty} i^{-d}$ *die Riemannsche Zetafunktion ist.*

Mit dem letzten Satz ist die Aufgabenstellung „Finde eine dichteste Gitterpackung für $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$“ in die äquivalente Aufgabe „Finde ein für $\mathcal{D}\mathrm{K}$ kritisches Gitter“ umgeformt worden, mit dem Gewinn, daß nur noch der *zentralsymmetrische* Differenzkörper von K betrachtet werden muß. Diese Umformung wurde das erste Mal von MINKOWSKI in [20] dargestellt. Natürlich kann man statt $\mathcal{D}\mathrm{K}$ auch den Körper $2\mathcal{D}\mathrm{K} = \mathrm{K} - \mathrm{K}$ betrachten und das erhaltene Gitter anschließend mit $\frac{1}{2}$ skalieren. Daher soll für den Rest der Arbeit, wenn nichts anderes gesagt wird, folgende Vereinbarung getroffen werden:

Vereinbarung 2.1: Wenn nichts anderes gesagt wird, dann werden im folgenden alle konvexen Körper o.B.d.A. als zentralsymmetrisch (*per definitionem* mit Mittelpunkt 0) vorausgesetzt, also $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^d$.

2.2 Bekannte Gitterpackungsdichten

Einige Körper überdecken den Raum lückenlos, so daß die Packungsdichte gleich 1 wird. Ansonsten sind die Packungsdichten nur für wenige Klassen von Körpern bekannt.

In Dimension $d = 2$ läßt sich der folgende, sehr prägnante Satz zur Charakterisierung von zulässigen bzw. kritischen Gittern heranziehen:

Satz 2.6. *Ist* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^2$ *ein konvexer Körper und* Λ *ein für* K *kritisches Gitter, so existiert eine Basis* $B = (b_1, b_2)$ *für* Λ*, so daß* $b_1, b_2, b_2 - b_1 \in \partial\mathrm{K}$ *gilt.*

Sind umgekehrt $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2$ *so gewählt, daß* $b_1, b_2, b_2 - b_1 \in \partial\mathrm{K}$ *gilt, dann ist das von* b_1, b_2 *erzeugte Gitter für* K *zulässig.*

Er läßt sich elementar beweisen (REINHARDT 1934, und unabhängig MAHLER 1947; siehe auch ROGERS [23]). Dieser Satz 2.6 wird MINKOWSKI vermutlich bekannt gewesen sein, denn er folgt aus dem Satz in Abschnitt 21 und Argumenten aus Abschnitt 18 in [20] für Dimension 3, allerdings hat MINKOWSKI ihn nicht publiziert.

Schon mit diesem Satz kann man die dichteste Gitterpackung für den (Einheits-)Kreis bestimmen: Setzt man $b_1 = \binom{1}{0}$ und $b_2 = \binom{a}{b}$ mit $\|b_2\| = 1$ an und fordert noch $\|b_2 - b_1\| = 1$,

[2] Für den allgemeinen Fall, daß $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$ nicht zentralsymmetrisch ist, haben ROGERS und SHEPHARD in [24] die Schranke $\frac{2(n!)^2}{(2n)!} \leq \delta(\mathrm{K})$ bewiesen.

dann folgt $a = \frac{1}{2}$ und $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, also daß b_2 und b_1 einen Winkel von 60° einschließen. Die Wahl von b_1 als den ersten Basisvektor des $\mathbb{R}^2$ war keine Einschränkung, und sonst waren alle Annahmen allgemein gemacht. Daher ist das von b_1, b_2 erzeugte Gitter nicht nur zulässig, sondern kritisch, denn es ist das einzige zulässige des im Satz betrachteten Typs.

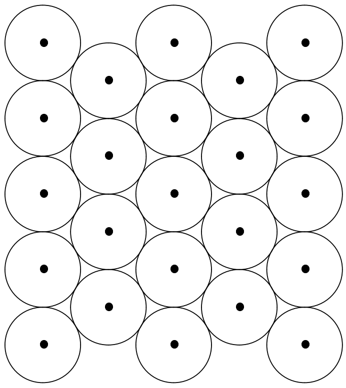

Abbildung 2.2: Dichteste Kreispackung

Die dichteste Gitterpackung für Kreise ist allerdings schon seit LAGRANGE (1773) bekannt. Für Kugeln sind die dichtesten Gitterpackungen in den Dimensionen bis $d = 8$ bekannt, die Dichten sind in Tabelle 2.1 aufgeführt.

d	$\delta(\mathcal{B}^{\mathbf{d}})$	**Autor**	**Referenz**
2	$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0.906899\ldots$	LAGRANGE 1773	[18]
3	$\frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0.740480\ldots$	GAUSS 1831	[10]
4	$\frac{\pi^2}{16} = 0.616850\ldots$	KORKINE und ZOLOTAREFF	[16], [17]
5	$\frac{\pi^2}{15\sqrt{2}} = 0.465257\ldots$		
6	$\frac{\pi^3}{48\sqrt{3}} = 0.372947\ldots$	BLICHFELDT	[1]
7	$\frac{\pi^3}{105} = 0.295297\ldots$		
8	$\frac{\pi^4}{384} = 0.253669\ldots$		

Tabelle 2.1: Dichteste Gitterpackungen für Kugeln

Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Kugelpackungen und deren Bedeutung für andere Gebiete der Mathematik, zum Beispiel bei der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen oder in der Codierungstheorie, findet sich bei CONWAY und SLOANE in [5].

Der Satz 2.6 liefert die Idee für einen Algorithmus von MOUNT und SILVERMAN (siehe [22] und auch [7]), der in $d = 2$ für zentralsymmetrische n-Ecke die Dichte einer dichtesten Gitterpackung mit Zeitaufwand $\mathcal{O}(n)$ findet. Hierbei wird ein zentralsymmetrisches Sechseck oder Parallelogramm minimalen Volumens bestimmt, dessen Ecken, der Reihe nach mit $b_1, b_2, b_2 - b_1, -b_1, -b_2, -b_2 + b_1$ bezeichnet, noch auf dem Rand des Körpers liegen. Die Vektoren b_1, b_2 spannen dann ein kritisches Gitter auf, und die Packungsdichte wird $\mathrm{Vol}\,(\mathrm{K}) \,/\, \big(4 \det(b_1 b_2)\big)$.

Desweiteren sind dichteste Gitterpackungen (mit recht komplizierten Formeln für die Packungsdichte) für den Parallelkörper eines Rechtecks und den Schnitt von zwei kongruenten Kreisen bekannt (L. FEJES TÓTH [8] und [9]).

Für einige spezielle konvexe Körper außer der Kugel wurden basierend auf dem Artikel von MINKOWSKI 1904 [20] dichteste Gitterpackungen bestimmt. MINKOWSKI selbst behauptet in seinem Aufsatz, eine dichteste Gitterpackung für das Tetraeder bestimmt zu haben; dabei ging er jedoch von der irrigen Annahme aus, der Differenzkörper desselben sei ein Oktaeder (dies bemerkt schon HANCOCK IN [13]). Erst 1970 gab HOYLMAN in [15] einen korrekten Beweis an. Die weiteren bekannten dichtesten Packungsdichten sind in Tabelle 2.2 aufgeführt. Hierbei ist vor allem das Ergebnis von CHALK und ROGERS [4] und gleichzeitig YEH [32] von Interesse, daß die dichteste Gitterpackungsdichte eines Zylinders mit konvexer Basis gleich der seiner Basis ist. Im Gegensatz dazu ist im $\mathbb{R}^4$ das analoge Resultat nur für den Zylinder über der 3-dimensionalen Kugel bekannt (vgl. WOODS [31]).

Körper K	δ(K)	**Autor**
reguläres Oktaeder	$\frac{18}{19}$	MINKOWSKI [20]
Tetraeder	$\frac{18}{49}$	HOYLMAN [15]
Kuboktaeder	$\frac{45}{49}$	HOYLMAN [15]
Würfel mit gekappten Ecken $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \lvert x_i\rvert \le 1, \lvert x_1 + x_2 + x_3\rvert \le \lambda\right\}$	$\begin{cases} \frac{9-\lambda^2}{9} & \text{für } 0 < \lambda \le \frac{1}{2} \\ \frac{9\lambda(9-\lambda^2)}{4(-\lambda^3-3\lambda^2+24\lambda-1)} & \text{für } \frac{1}{2} \le \lambda \le 1 \\ \frac{9(\lambda^3-9\lambda^2+27\lambda-3)}{8\lambda(\lambda^2-9\lambda+27)} & \text{für } 1 \le \lambda \le 3 \end{cases}$	WHITWORTH [28]
Kugel-Frustum $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \lvert x\rvert \le 1,\ \lvert x_3\rvert \le \lambda \le 1\right\}$	$\frac{\pi}{6}\sqrt{3-\lambda^2}$	CHALK [3]
Kreiskegel $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \lvert x_3\rvert \le 1\right\}$	$\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$	WHITWORTH [29]
Zylinder über konvexer Basis C′	$\delta(\mathrm{C}')$	CHALK und ROGERS[4], YEH[32]

Tabelle 2.2: Körper in $\mathfrak{K}^3$, deren dichteste Gitterpackung bekannt ist.

Kapitel 3

Überblick

Dieses Kapitel soll zur Motivation der folgenden Kapitel dienen und dabei auch einen Überblick über die Struktur der dort bewiesenen Aussagen bringen.

Die ursprüngliche Frage, wie man eine möglichst dichte Gitterpackung für einen konvexen Körper bestimmt, läßt sich nach Satz 2.2 und Satz 2.3 darauf reduzieren, daß ein kritisches Gitter für den zugehörigen Differenzkörper bestimmt werden muß. Dies ist zwar angenehm, weil man zum einen hoffen kann, daß die Zentralsymmetrie des Differenzkörpers sich günstig ausnützen lassen wird, zum anderen, weil die Bildung des Differenzkörpers auch Struktur „vergißt“: Verschiedene konvexe Körper können durchaus denselben Differenzkörper besitzen. Wir wissen dann, daß sie durch dasselbe Gitter bestmöglich gepackt werden. Die Suche eines Gitters minimaler Determinante in der Menge aller für den Differenzkörper zulässigen Gitter ist aber noch nicht deutlich einfacher.

Der erste Schritt, um eine Struktur in der Menge der kritischen Gitter für K zu erkennen, ist die Feststellung, daß jeder zentralsymmetrische konvexe Körper ein Gitterkreuzpolytop, in gewissem Sinne das einfachste volldimensionale symmetrische Gitterpolytop in gegebener Dimension, enthält. Satz 4.3 klassifiziert die möglichen Gitteroktaeder für Dimension 3: Es gibt genau zwei verschiedene Typen.

Es stellt sich die Frage, wie viele Punkte eines kritischen Gitters überhaupt im Rand des Differenzkörpers liegen können. Der Satz von Swinnerton-Dyer (Satz 4.2) liefert eine untere Schranke. Der Satz 4.4 listet alle die Gitterpunkte eines zulässigen Gitters auf, die überhaupt auf K auftauchen können, wodurch eine grobe obere Schranke gegeben ist.

Das nächste Ziel ist es, ein, wie auch immer geartetes, *endliches* System von Bedingungen für die Zulässigkeit eines Gitters bezüglich eines Körpers zu formulieren. Mit Hilfe der Distanzfunktion F_{K} kann man dies erreichen: Es genügt, für eine endliche Zahl von Gitterpunkten z zu fordern, daß $F_{\mathrm{K}}(z) \geq 1$ sein soll, um die Zulässigkeit des Gitters für K zu garantieren (Satz 5.1). Die Menge der Punkte, für die dies zu fordern ist, hängt davon ab, ob man in K Gitteroktaeder erster oder zweiter Art findet. Anschließend werden zwei Verschärfungen dieses Satzes bewiesen und die möglichen Punktkonstellationen unter sehr speziellen Voraussetzungen untersucht.

Mit diesem Wissen kann der Klassifikationssatz 5.6 bewiesen werden, der drei sehr spezielle Typen von Gittern beschreibt, unter denen sich immer mindestens ein kritisches für den Körper K findet. Auf der Suche nach einem kritischen Gitter genügt es nun, nur unter diesen drei Typen zu suchen, die außerdem recht einfach charakterisiert sind, nämlich durch je eine kurze Liste von Gitterpunkten, von denen sich einige im Rand und einige außerhalb von K finden müssen. Es gilt sogar eine Art Umkehrung der Klassifikation: Jedes Gitter, das den im Klassifikationssatz angegebenen Bedingungen genügt, ist bereits zulässig (Satz 5.7).

Die beiden letzten Sätze erlauben, das Problem, ein kritisches Gitter zu finden, als nichtlineares ganzzahliges Optimierungsproblem zu formulieren: Es soll die Gitterdeterminante minimiert werden, während eine endliche Anzahl von Gleichungen und Ungleichungen bezüglich der Distanzfunktion gilt. Dies gibt Anlaß zu der Frage, ob man für solche konvexen Körper, bei denen diese (Un-)Gleichungen zum Beispiel linear sind, ein praktikables Lösungsverfahren finden kann. Tatsächlich läßt sich für Polytope ein solcher Algorithmus herleiten, der durch das Lösen gewisser Gleichungssysteme und die Berechnung der lokalen Extrema von Polynomen in 3 Variablen mit Totalgrad 3 ein kritisches Gitter findet. Allerdings müssen dabei im wesentlichen alle möglichen Auswahlen von je 6 oder 7 Facetten des Polytops betrachtet werden, so daß das Verfahren für facettenreiche Polytope sehr aufwendig wird. Die Herleitung dieses Algorithmus ist Inhalt des Kapitels 6.

Kapitel 4

Kreuzpolytope

Ein zentrales Element der Minkowskischen Methode zur Bestimmung von kritischen Gittern ist die Klassifikation der Gitter-Kreuzpolytope in der jeweiligen Dimension. Dies wird in diesem Kapitel für die Dimension 3 geschehen. Die Verbindung zwischen Kreuzpolytopen und konvexen Körpern wird in in den folgenden Sätzen deutlich.

4.1 Einbeschriebenes Kreuzpolytop

Satz 4.1. *Ein kritisches Gitter Λ für den konvexen Körper $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^d$ enthält wenigstens d linear unabhängige Randpunkte von* K.

Beweis. Sei M der lineare Unterraum, der von den Gitterpunkten von Λ erzeugt wird, die gleichzeitig Randpunkte von K sind. Sei $m = \dim M$. Angenommen $m < d$. Dann hat Λ eine Basis $\{l_1, \ldots, l_d\}$, so daß $l_i \in M$ für $i = 1, \ldots, m$. Da K beschränkt ist und $\Lambda \setminus M$ den Rand von K nicht schneidet, existiert ρ mit $0 < \rho < 1$, so daß das Gitter $\Lambda' := \{l_1, \ldots, l_m, \rho l_{m+1}, \ldots, \rho l_d\}$ zulässig ist für K. Das widerspricht der Voraussetzung, daß Λ kritisch war. □

Der letzte Satz zeigt, da wegen der Zentralsymmetrie zu jedem Gitterpunkt v_i auch $-v_i$ auf K auftritt, daß K sogar immer den Körper

$$\mathfrak{CP}(v_1, \ldots, v_d) := \operatorname{conv}(\pm v_1, \ldots, \pm v_d)\,, \tag{4.1}$$

das *d-dimensionale Kreuzpolytop, erzeugt von den Vektoren* $v_1, \ldots, v_d$, enthält.

Lemma 4.1. *Sei Λ ein kritisches Gitter für $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^d$. Wählt man unter allen auf dem Rand von* K *vorkommenden Gitterpunkten $(v_1, \ldots, v_d)$ linear unabhängig und so, daß das Volumen des Kreuzpolytops $\mathfrak{CP}(v_1, \ldots, v_d)$ minimal ist, so enthält dieses Kreuzpolytop außer seinen Ecken und dem Mittelpunkt keine Gitterpunkte.*

Beweis. Enthält $\mathfrak{CP}(v_1, \ldots, v_d)$ noch einen weiteren Gitterpunkt p außer dem Mittelpunkt und seinen Ecken, so ist dies auch ein Punkt von K. Wählt man nun $d-1$ Vektoren aus $\{v_1, \ldots, v_d\}$, so daß sie mit p noch linear unabhängig sind (o.E. seien dies die ersten $d-1$), so ist das Volumen von $\mathfrak{CP}(v_1, \ldots, v_{d-1}, p)$ kleiner, Widerspruch. □

Die Aussage von Satz (4.1) läßt sich noch wesentlich verstärken:

Satz 4.2 (Swinnerton-Dyer). *Jedes für* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^d$ *kritische Gitter enthält wenigstens* $d(d+1)$ *Randpunkte von* K.

Für einen Beweis siehe [26].

4.2 Gitterkreuzpolytope

Ein Kreuzpolytop, dessen Ecken Gitterpunkte sind, das aber sonst außer dem Nullpunkt weder im Inneren noch im Rand Gitterpunkte enthält, nennen wir *Gitter-Kreuzpolytop.* Im Falle $d = 3$ sprechen wir auch von einem *Gitteroktaeder.*

4.2.1 Klassifikation in Dimension d=3

Satz und Definition 4.3. *Das Oktaeder* $\mathfrak{CP}\,(v_1, v_2, v_3)$ *ist genau dann Gitteroktaeder bezüglich des Gitters* Λ, *wenn eine Basis* b_1, b_2, b_3 *von* Λ *existiert, für die gilt:*

$$v_1 = b_1, \quad v_2 = b_2, \quad v_3 = b_3$$

oder

$$v_1 = b_1, \quad v_2 = b_2, \quad v_3 = b_1 + b_2 + 2b_3.$$

Im ersten Falle heißt das Gitteroktaeder Gitteroktaeder vom Typ 1 *oder* von erster Art*, und das von* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *erzeugte Gitter stimmt mit* Λ *überein. Im anderen Falle nennen wir* $\mathfrak{CP}\,(v_1, v_2, v_3)$ *ein* Gitteroktaeder vom Typ 2 *oder* von zweiter Art*; das von seinen Eckpunkten erzeugte Gitter ist ein echtes Teilgitter von* Λ, *denn es stimmt mit dem von* b_1, b_2 *und* $(b_1 + b_2 + 2b_3)$ *erzeugten Gitter überein.*

Beweis. Man kann immer eine Basis (b_1, b_2, b_3) für Λ so wählen, daß

$$v_1 = \lambda_1 b_1, \qquad v_2 = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 \text{ und } v_3 = \nu_1 b_1 + \nu_2 b_2 + \nu_3 b_3$$

mit ganzzahligen Koeffizienten sind, wobei $0 < \lambda_1,\ 0 \le \mu_1 < \mu_2$ und $0 \le \nu_1, \nu_2 < \nu_3$ ist (dies bedeutet nichts anderes, als daß die ganzzahlige Matrix, die (b_1, b_2, b_3) auf (v_1, v_2, v_3) abbildet, mittels ganzzahligem Gauss-Algorithmus in obere Dreiecksgestalt gebracht wurde und dann durch Zeilenoperationen die abseits der Diagonale liegenden Einträge auf die geforderte Form reduziert wurden).

Spannen v_1, v_2, v_3 ein Gitteroktaeder auf, so muß $\lambda_1 = 1$ sein, denn sonst läge der Punkt b_1 im Inneren des Oktaeders. Auch $\mu_2 = 1$, denn wäre $\mu_2 \ge 2$, so enthielte das Dreieck $0, v_1, v_2$ den Gitterpunkt b_2, wenn $\mu_1 = 0$ wäre, oder den Gitterpunkt $b_1 + b_2$, wenn $\mu_1 \ge 1$ wäre; dies ist aber nicht möglich, denn das Dreieck ist gitterpunktfrei, weil v_1, v_2, v_3 ein Gitteroktaeder aufspannen. Folglich ist $\mu_2 = 1$ wie behauptet, und daher $\mu_1 = 0$.

Wir dürfen also b_1 und b_2 beziehungsweise v_1 und v_2 vertauschen und können daher $\nu_1 \le \nu_2$ annehmen. Wir schreiben der Einfachheit halber $a = \nu_1$, $b = \nu_2$ und $c = \nu_3$. Sei $B = (b_1, b_2, b_3)$, dann ist $B^{-1}v_1 = e_1$, $B^{-1}v_2 = e_2$ und $B^{-1}v_3 = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$. Das transformierte

Gitteroktaeder $B^{-1}\mathfrak{CP}\,(v_1, v_2, v_3)$ ist also beschrieben durch

$$\left\{ p = \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right) = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \text{ mit } |u_1| + |u_2| + |u_3| \leq 1 \right\}.$$

Da $c > 0$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \frac{p_3}{c} &= u_3, \\ p_2 - \frac{p_3}{c} b &= u_2, \\ p_1 - \frac{p_3}{c} a &= u_1, \end{aligned}$$

so daß man die Punkte p im transformierten Oktaeder auch durch

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; L(p_1, p_2, p_3) := \left|p_1 - \tfrac{a}{c} p_3\right| + \left|p_2 - \tfrac{b}{c} p_3\right| + \left|\tfrac{1}{c} p_3\right| \leq 1 \right\} \tag{4.2}$$

charakterisieren kann. Nach unseren Voraussetzungen ist dabei $0 \leq a \leq b < c$, und es gibt keinen Gitterpunkt außer $\pm e_1, \pm e_2$ und $\pm \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$, der die obige Ungleichung erfüllt. Wir wollen die in dieser Situation möglichen Tripel (a, b, c) bestimmen. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

1. $c = 1$. Nach Voraussetzung ist dann $a = b = 0$.
2. $c > 1$ ungerade. Dann erfüllt der Gitterpunkt $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ die Bedingung in (4.2), wenn man $x_1 = \begin{cases} 0 & \text{für } 2a < c \\ 1 & \text{für } 2a > c \end{cases}$ und $x_2 = \begin{cases} 0 & \text{für } 2b < c \\ 1 & \text{für } 2b > c \end{cases}$ wählt, Widerspruch.
3. $c = 2s > 1$ gerade. Wenn nicht $a = b = s$ gilt, dann findet man einen Gitterpunkt $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $x_1 = 0$ oder 1, $x_2 = 0$ oder 1, der die Bedingung in (4.2) erfüllt, genau wie für ungerades c im letzten Fall. Ist $a = b = s$ und $s > 1$ so liegt $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ in der Menge aus (4.2). Es bleibt die Möglichkeit $a = 1, b = 1, c = 2$ übrig.

Wir finden also für das Tripel (a, b, c) als einzig mögliche Wahlen $(0, 0, 1)$ oder $(1, 1, 2)$, was die eine Richtung des Satzes beweist.

Ist nun ein Oktaeder mit den Ecken v_1, v_2, v_3 gegeben, und bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis des Gitters, so ist es notwendig gitterpunktfrei, also ein Gitteroktaeder. Existiert eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ des Gitters, so daß $v_1 = b_1$, $v_2 = b_2$ und $v_3 = b_1 + b_2 + 2b_3$ gelten, so ist $B^{-1}\mathfrak{CP}\,(v_1, v_2, v_3)$ (vgl. (4.2)) gegeben durch

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left|p_1 - \tfrac{1}{2} p_3\right| + \left|p_2 - \tfrac{1}{2} p_3\right| + \left|\tfrac{1}{2} p_3\right| \leq 1 \right\}.$$

Sollte nun ein Punkt $p = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right)$ mit ganzzahligen Koordinaten in dieser Menge liegen, so muß $|x_3| \leq 2$ gelten. Durch Fallunterscheidung sieht man dann aber, daß für $x_3 = \pm 2$ nur

$x_1 = x_2 = \pm 1$ und für $x_3 = 0$ nur $x_1 = \pm 1$ und $x_2 = 0$ oder $x_1 = 0$ und $x_2 = \pm 1$ in Frage kommen. Für $x_3 = 1$ können keine ganzzahligen x_1, x_2 gewählt werden. Also sind die Ecken des Oktaeders seine einzigen Gitterpunkte. $\square$

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß ein Gitter Λ mit Basis (b_1, b_2, b_3) gegeben ist und die Koordinaten der auftretenden Vektoren auf diese Basis bezogen sind.

Korollar 4.1. *Sei Λ ein Gitter mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ und seien drei Gitterpunkte v_1, v_2, v_3 mit $v_i = Bc_i$ für $i = 1, 2, 3$ gegeben. Das Oktaeder $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3) = B\mathfrak{CP}(c_1, c_2, c_3)$ mit $c_k = \begin{pmatrix} c_k^1 \\ c_k^2 \\ c_k^3 \end{pmatrix}$ $(k = 1, 2, 3)$ ist genau dann vom Typ 1, wenn die $\det(c_1 c_2 c_3) = \pm 1$ ist, und genau dann vom Typ 2, wenn $\det(c_1 c_2 c_3) = \pm 2$ ist und außerdem die 3 halbierten Zeilensummen $\frac{1}{2}(c_1^1 + c_2^1 + c_3^1)$, $\frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$ und $\frac{1}{2}(c_1^3 + c_2^3 + c_3^3)$ ganzzahlig sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ vom Typ 1, so existiert nach Satz 4.3 eine Basis $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ für Λ, so daß $v_i = b'_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Dann ist aber wegen $B'e_i = Bc_i = v_i$ $(i = 1, 2, 3)$

$$1 = \underbrace{\det (B')^{-1} B}_{=\pm 1} \det (c_1 c_2 c_3),$$

also $\det(c_1 c_2 c_3) = \pm 1$. Umgekehrt folgt aus $\det(c_1 c_2 c_3) = \pm 1$ und $Bc_i = v_i$ $(i = 1, 2, 3)$, daß $B' = (b'_1, b'_2, b'_3) := (Bc_1, Bc_2, Bc_3)$ eine Basis für Λ ist, die $v_i = b'_i$ $(i = 1, 2, 3)$ erfüllt.

Ist $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ vom Typ 2, so existiert nach Satz 4.3 eine Basis $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ für Λ, so daß $B(c_1 c_2 c_3) = (v_1 v_2 v_3) = B' \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist. Da aber $|\det B'| = |\det B|$ gilt, ist dann $|\det(c_1 c_2 c_3)| = 2$. Es existiert also eine unimodulare Matrix U, so daß $(c_1 c_2 c_3) = U \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist. Schreibt man $U = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 \end{pmatrix}$, so ist für $k = 1, 2, 3$ jeweils $c_1^k + c_2^k + c_3^k = 2(u_1^k + u_2^k + u_3^k)$, also $\frac{1}{2}(c_1^k + c_2^k + c_3^k)$ noch ganzzahlig.

Ist schließlich $\det(c_1 c_2 c_3) = \pm 2$ und sind die halbierten Zeilensummen ganzzahlig, so kann man

$$\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \frac{1}{2}(c_3^1 - c_1^1 - c_2^1) \\ c_1^2 & c_2^2 & \frac{1}{2}(c_3^2 - c_1^2 - c_2^2) \\ c_1^3 & c_2^3 & \frac{1}{2}(c_3^3 - c_1^3 - c_2^3) \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei U nur ganzzahlige Einträge hat. Die Determinante der Matrix auf der linken Seite ist nach Voraussetzung 2, U hat daher Determinante 1, ist also unimodular. Dann ist aber $(v_1 v_2 v_3) = BU \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, also ist nach Satz 4.3 das Oktaeder $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ ein Gitteroktaeder vom Typ 2. $\square$

Vereinbarung 4.1: Für linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ sei V die reguläre Matrix mit Spaltenvektoren v_i. Für einen Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ sei mit w_V der Vektor $V \cdot w$ bezeichnet.

Satz 4.4. *Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Das von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_V$ gebildetete Oktaeder (mit $0 \le a \le b \le c$ und $c \ge 2$) enthält immer mindestens einen der Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_V$ oder $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_V$ als inneren Punkt, es sei denn*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_V \in M := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_v, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_V \right\}. \tag{4.3}$$

Beweis. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $v_i = e_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt; anderenfalls wenden wir die Koordinatentransformation V^{-1} an.

Wie schon im Beweis der Gitteroktaederklassifikation läßt sich eine einfache das Gitteroktaeder beschreibende Ungleichung aufstellen: Ein Punkt $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ liegt genau dann im Oktaeder $\mathfrak{CP}\left(e_1, e_2, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right)$, wenn er sich als

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

mit $|\lambda| + |\mu| + |\nu| \le 1$ darstellen läßt. Da $c > 0$ gilt, ist

$$\begin{aligned} \frac{p_3}{c} &= \nu, \\ p_2 - \frac{p_3}{c} b &= \mu, \\ p_1 - \frac{p_3}{c} a &= \lambda, \end{aligned}$$

so daß man die Punkte p im Oktaeder auch durch

$$L(p_1, p_2, p_3) := \left| p_1 - \frac{p_3}{c} a \right| + \left| p_2 - \frac{p_3}{c} b \right| + \left| \frac{p_3}{c} \right| \le 1 \tag{4.4}$$

charakterisieren kann.

Sei zunächst c ungerade, also $c = 2d + 1$. Dann unterscheiden wir die folgenden 3 Fälle:

- $a < d$ mit $b \le d$:
  Hier findet man den Punkt $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Inneren des Oktaeders, denn
  $$L(0,0,1) \le \tfrac{a+b+1}{2d+1} < \tfrac{2d+1}{2d+1} = 1.$$

- $a < d$ mit $b \ge d + 1$ oder $a = d$ mit $b > d + 1$:
  Hier findet man den Punkt $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Inneren des Oktaeders, denn
  $$L(0,1,1) = \tfrac{a + 2d+1-b+1}{2d+1} < \tfrac{2d+1}{2d+1} = 1.$$

- $a \geq d+1$ und $b > d+1$:
  Hier findet man den Punkt $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Inneren des Oktaeders, denn
  $$L(1,1,1) = \frac{2d+1-a+2d+1-b+1}{2d+1} < \frac{2d+1}{2d+1} = 1.$$

Da $a \leq b \leq c$ war, bleiben nur die Fälle $a = d, b = d$, $a = d, b = d+1$ sowie $a = d+1, b = d+1$ übrig. Für alle drei Kombinationen ist aber $L(1,1,2) = \frac{4}{2d+1}$, und dieser Bruch ist für $c > 3$ kleiner als 1. Die in die Menge M aufzunehmenden Punkte sind also für ungerades c nur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Nun betrachten wir den Fall, daß $c = 2d$ gerade ist. Auch hier unterscheiden wir 3 Fälle:

- $a < d-1$ mit $b \leq d$ oder $a = b = d-1$:
  In diesem Fall liegt $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Inneren des Oktaeders, denn
  $$L(0,0,1) < \frac{d-1+d+1}{2d} = 1.$$

- $a < d$ mit $b \geq d+1$:
  Hier findet man $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Inneren des Oktaeders, weil
  $$L(0,1,1) < \frac{d+2d-d-1+1}{2d} = 1.$$

- $a > d$ mit $b \geq d+1$ oder $a = d$ mit $b > d+1$:
  Hier findet man $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ im Inneren des Oktaeders, denn
  $$L(1,1,1) < \frac{2d-d+2d-d-1+1}{2d} = 1.$$

Es bleiben daher nur die Kombinationen $a = d-1, b = d$, $a = d, b = d+1$ sowie $a = b = d$ übrig. Für die ersten beiden Kombinationen ist $L(1,1,2) = \frac{4}{2d}$, und dieser Ausdruck ist < 1 wenn $c > 4$ ist. Für die Wahl $a = b = d$ ist $L(1,1,2) = \frac{2}{2d}$, was schon für $c > 2$ kleiner als 1 wird. Das bedeutet, daß der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ fast immer im Inneren des Oktaeders liegt: nur die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $c = 2$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ für $c = 4$ müssen in die Menge M aufgenommen werden.

Damit ist der Satz bewiesen. □

4.2.2 Gitterkreuzpolytope in anderen Dimensionen

Eine Klassifikation für Dimension $d = 4$ findet sich erstmals bei Brunngraber [2]. Eine vereinfachte Fassung des Beweises von Brunngraber stammt von Laub [19], der auch einige Aussagen für spezielle höhere Dimensionen beweist. Erneut vereinfacht wird die

Klassifikation bei Wolff [30] und auf andere und elegantere Weise bei Mordell in [21] dargestellt; Mordell wendet seine Methode auch für die Klassifikation der Gitteroktaeder in Dimension $d = 3$ an.

Für die Klassifikation der Gitterkreuzpolytope in $d = 5$ verweise ich auf Wessels [27], dessen sehr aufwendige Untersuchung (89 wesentlich verschiedene Typen von Kreuzpolytopen) damit schließt, daß eine „Klassifikation in höheren Dimensionen [...] wenig erstrebenswert“ scheint.

Kapitel 5

Eigenschaften kritischer Gitter in Dimension d=3

Sei $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^3$ ein zentralsymmetrischer konvexer Körper mit Distanzfunktion F_{K} und sei Λ ein kritisches Gitter für K. Nach Satz 4.1 und Lemma 4.1 enthält K immer ein Gitteroktaeder vom Typ 1 oder eines vom Typ 2, das von Gitterpunkten aus Λ erzeugt wird. Im folgenden seien $v_1, v_2, v_3 \in \Lambda$ drei Vektoren, die ein solches Gitteroktaeder vom Typ 1 oder Typ 2 erzeugen; die Matrix mit den Spalten v_1, v_2, v_3 werde wieder mit V bezeichnet. Da diese v_i auf dem Rand von K liegen, gilt offenbar

$$F_K(\pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_V) = F_K(\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_V) = F_K(\pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_V) = 1. \tag{5.1}$$

Vereinbarung 5.1: Im folgenden schreiben wir aus Gründen der Übersichtlichkeit $F^V(x,\, y,\, z)$ statt $F_{\mathrm{K}}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_V\right)$. Wenn V unimodular ist, so wird noch einfacher $F(x, y, z)$ geschrieben.

5.1 Packungsungleichungen

Ist nun $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ vom Typ 1, so bilden nach Satz 4.3 die v_i $(i = 1, 2, 3)$ eine Basis von Λ und man kann die Forderung nach der Zulässigkeit des Gitters durch

$$F^V(z_V) \geq 1, \qquad z \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{0\} \tag{5.2}$$

ausdrücken. Ist andererseits $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ vom Typ 2, so wird die Zulässigkeit des Gitters durch (5.2) und

$$F^V\left(z_1 + \tfrac{1}{2}, z_2 + \tfrac{1}{2}, z_3 + \tfrac{1}{2}\right) \geq 1, \qquad z = (z_1, z_2, z_3)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Z}^3. \tag{5.3}$$

beschrieben.

5.1.1 Reduktion der Anzahl der Ungleichungen

Satz 5.1. *Sei* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^3$ *ein zentralsymmetrischer konvexer Körper,* Λ *ein kritisches Gitter für* K *und* $v_1, v_2, v_3 \in \partial\mathrm{K}$ *so, daß* $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ *ein Gitteroktaeder erster oder zweiter Art bildet. Dann gilt:*
Ist $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ *ein Gitteroktaeder vom Typ 1, so folgen aus (5.4), (5.5), (5.6) und (5.7) bereits alle Ungleichungen (5.2).*
Ist $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ *ein Gitteroktaeder vom Typ 2, so folgen aus (5.4) und (5.8) bereits alle Ungleichungen (5.2) und (5.3).*

$$\begin{aligned} &F^V(1,\,0,\,0) \geq 1,\\ &F^V(0,\,1,\,0) \geq 1,\\ &F^V(0,\,0,\,1) \geq 1. \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} &F^V(1,\,1,\,0) \geq 1, && F^V(1,\,-1,\,0) \geq 1,\\ &F^V(1,\,0,\,1) \geq 1, && F^V(1,\,0,\,-1) \geq 1,\\ &F^V(0,\,1,\,1) \geq 1, && F^V(0,\,1,\,-1) \geq 1. \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} F^V(1,\,1,\,1) &\geq 1, && F^V(-1,\,-1,\,1) \geq 1,\\ F^V(1,\,-1,\,-1) &\geq 1, && F^V(-1,\,1,\,-1) \geq 1. \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} F^V(1,\,1,\,2) &\geq 1, && F^V(-1,\,-1,\,2) \geq 1,\\ F^V(1,\,-1,\,-2) &\geq 1, && F^V(-1,\,1,\,-2) \geq 1,\\ F^V(1,\,2,\,1) &\geq 1, && F^V(-1,\,-2,\,1) \geq 1,\\ F^V(1,\,-2,\,-1) &\geq 1, && F^V(-1,\,2,\,-1) \geq 1,\\ F^V(2,\,1,\,1) &\geq 1, && F^V(-2,\,-1,\,1) \geq 1,\\ F^V(2,\,-1,\,-1) &\geq 1, && F^V(-2,\,1,\,-1) \geq 1. \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} F^V\left(\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2}\right) &\geq 1, && F^V\left(-\tfrac{1}{2},\,-\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2}\right) \geq 1,\\ F^V\left(\tfrac{1}{2},\,-\tfrac{1}{2},\,-\tfrac{1}{2}\right) &\geq 1, && F^V\left(-\tfrac{1}{2},\,\tfrac{1}{2},\,-\tfrac{1}{2}\right) \geq 1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Beweis. Wir dürfen wieder o.B.d.A. annehmen, daß die v_i $(i = 1, 2, 3)$ mit den Einheitsvektoren übereinstimmen, d.h. wir identifizieren K mit $V^{-1}\mathrm{K}$ und Λ mit $V^{-1}\Lambda$.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

- $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ ist ein Typ-1 Gitteroktader:

Angenommen es gäbe einen Gitterpunkt p, für den $F(p) < 1$ wäre, während die Bedingungen (5.1),(5.5),(5.6) und (5.7) gelten. Dann kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Komponenten von $p = (a,\, b,\, c)$ seien als $0 \le a \le b \le c$ mit $c \ge 2$ geordnet, denn unter Vertauschung und Multiplikation mit -1 der Basisvektoren bleiben die Bedingungen (5.1), (5.5), (5.6) und (5.7) invariant. Nach Satz 4.4 liegt dann aber mit p auch mindestens einer der Punkte $(0,\, 0,\, 1)\,, (0,\, 1,\, 1)\,, (1,\, 1,\, 1)$ oder $(1,\, 1,\, 2)$ im Inneren von K, was offensichtlich im Widerspruch zu jeweils einer Bedingung aus (5.1),(5.5), (5.6) oder (5.7) steht, es sei denn p ist ein Punkt aus der Menge M in (4.3).

Es bleibt also nur noch zu untersuchen, ob die Punkte aus M in (4.3) unter den gegebenen Bedingungen im Inneren von K liegen können. Das ist aber nicht der Fall:

$$\begin{aligned}
&F(0,1,2)+F(0,-1,0) && \ge 2F(0,0,1) \overset{(5.1)}{=} 2,\\
\Longrightarrow\quad &F(0,1,2) \ge 2-F(0,-1,0) = 2-1 = 1, &&\\
&F(1,1,2) && \overset{(5.7)}{\ge} 1,\\
&F(1,2,2)+F(-1,0,0) && \ge 2F(0,1,1) \overset{(5.5)}{\ge} 2,\\
&F(1,1,3)+F(-1,0,0)+F(0,-1,0) && \ge 3F(0,0,1) \overset{(5.1)}{=} 3,\\
&F(1,2,3)+F(-1,0,0)+F(0,1,0) && \ge 3F(0,1,1) \overset{(5.5)}{\ge} 3,\\
&F(2,2,3)+F(0,0,-1) && \ge 2F(1,1,1) \overset{(5.6)}{\ge} 2,\\
&F(1,2,4)+F(-1,0,0)+2F(0,-1,0) && \ge 4F(0,0,1) \overset{(5.1)}{=} 4,\\
&F(2,3,4)+F(0,-1,0) && \ge 2F(1,1,2) \overset{(5.7)}{\ge} 2.
\end{aligned}$$

Damit können die Punkte aus M höchstens noch auf der Hülle von K liegen, weil jeweils $F(p) \ge 1$ ist, was zu beweisen war.

- $\mathfrak{CP}\,(v_1, v_2, v_3)$ ist Typ-II Gitteroktader:

  Aus (5.8) folgen zunächst alle Ungleichungen (5.5)–(5.8), denn

$$\begin{gathered}
F(1,1,1) = 2F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \ge 2,\\
F(1,1,0)+F(0,0,1) \ge F(1,1,1) \ge 2 \Rightarrow F(1,1,0) \ge 1,\\
F(1,1,2)+F(0,0,-1) \ge F(1,1,1) \ge 2 \Rightarrow F(1,1,2) \ge 1;
\end{gathered}$$

analoge Beziehungen gelten für alle anderen fraglichen Punkte. Nach dem ersten Teil des Beweises folgen daher aus (5.8) alle Ungleichungen der Klasse (5.2).

Es bleiben noch die Punkte vom Typ $p = (a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2})$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$ aus (5.3) zu betrachten. Ohne Einschränkung seien die Koordinaten als $0 \le \frac{2a+1}{2} \le \frac{2b+1}{2} \le \frac{2c+1}{2}$ geordnet (durch Vertauschen der Koordinatenvektoren und ggf. Austausch eines der Basisvektoren gegen sein Negatives); offenbar ist $2c+1 \ge 3$. Das Gitteroktaeder $\mathfrak{CP}\,(v_1, v_2, p)$ ist dann durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; L(x_1,x_2,x_3) = \left|x_1 - \tfrac{2a+1}{2c+1}x_3\right| + \left|x_2 - \tfrac{2b+1}{2c+1}x_3\right| + \left|\tfrac{2}{2c+1}x_3\right| \le 1 \right\}$$

gegeben. Für den Punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ wird L wegen $a, b \geq 0$

$$L(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = \frac{(c-a)+(c-b)+1}{2c+1} \leq \frac{(c-0)+(c-0)+1}{2c+1} = 1. \tag{5.9}$$

Gälte also $F(p) < 1$, so wäre auch $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) < 1$, im Widerspruch zu 5.8.

Bemerkung 5.1: Der Ausdruck in 5.9 ist sogar < 1, wenn nicht gerade $a = b = 0$ gilt, also p von der Form $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$ mit $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ist.

□

Satz 5.2 (Verschärfung von Satz 5.1). *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 5.1.*

- *Für Gitteroktaeder vom Typ 1:*
  Gilt in den Ungleichungen (5.5),(5.6) und (5.7) sogar strenge Ungleichheit, so liegt außer den durch (5.1) erzwungenen Punkten kein weiterer Gitterpunkt auf dem Rand von K.

- *Für Gitteroktaeder vom Typ 2:*
  Gilt in den Ungleichungen (5.8) sogar strenge Ungleichheit, so liegt außer den durch (5.1) erzwungenen Punkten kein weiterer Gitterpunkt auf dem Rand von K.

Beweis. Wir dürfen wieder o.B.d.A. annehmen, daß die v_i $(i = 1, 2, 3)$ mit den Einheitsvektoren übereinstimmen, indem K mit V^{-1}K und Λ mit $V^{-1}\Lambda$ identifiziert werden.

Zu beweisen ist nur, daß auf dem Rand von K kein weiterer Gitterpunkt liegt, denn die einzige Veränderung der Bedingungen die gegenüber Satz 5.1 eingetreten ist, ist die, daß für einige Punkte gefordert wird, daß sie außerhalb von K liegen müssen.

Man beachte zunächst, daß der Beweis von Satz 5.1 für alle Punkte von der Form $p = \left(a + \frac{1}{2},\ b + \frac{1}{2},\ c + \frac{1}{2}\right)$ mit $a, b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ direkt übernommen werden kann, um unter der Annahme, daß $F(p) = 1$ sei, den Widerspruch $F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \leq 1$ zu erhalten, so daß also nie ein solcher Punkt mit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ auf dem Rand von K liegen kann.

Angenommen wir hätten einen Punkt $p = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ auf dem Rand von K gefunden, der nicht zu den 6 gemäß (5.1) auf K liegenden Punkten gehört. Wir können o.E. annehmen, daß p im $(+, +, +)$-Orthanten liegt (durch Austauschen der Vektoren v_1, v_2, v_3 gegen ihre Negativen), und daß die Komponenten als $0 \leq a \leq b \leq c$ geordnet sind (Vertauschen von v_1, v_2, v_3 untereinander). Nun wenden wir den Satz 4.4 an: p kann nur einer der Punkte aus der Menge M in (4.3) sein.

- Für Typ 2 – Gitteroktaeder:

Wegen $F\,(1,\ 1,\ 1) = 2F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) > 2$ liegt dieser Punkt außerhalb von K.

Wegen $F\,(0,\ 1,\ 1) + F\,(1,\ 0,\ 0) \geq F\,(1,\ 1,\ 1) > 2$ ist $F\,(0,\ 1,\ 1) > 1$ und damit dieser Punkt außerhalb von K.

Aber auch keiner der anderen Punkte kommt als auf dem Rand von K liegend in Frage. Der Beweis verläuft für alle Punkte nach demselben Schema: Wir nehmen an, daß der Punkt auf K läge, und geben dann eine Konvexkombination mit anderen auf K liegenden

Punkten an, die einen bereits bekanntermaßen außerhalb des Körpers gelegenen Punkt als Punkt von K darstellt. Widerspruch.

Falls die verwendeten Punkte affin unabhängig sind, liegt der dargestellte Punkt (weil die Koeffizienten $\neq 0$ sind) sogar im Inneren von K, so daß es für einen Widerspruch ausreicht, wenn wir einen Punkt als Konvexkombination finden, von dem wir nur wissen, daß er auf dem Rand von K liegt (vgl. Satz 1.5).

Konvexkombination	Widerspruch zu
$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{6}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\frac{3}{8}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{8}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{8}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{3}{8}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{3}{8}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{8}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{4}{10}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{3}{10}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{10}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{12}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\frac{5}{12}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{4}{12}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{12}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	(5.8),
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	(5.8).

- Für Typ 1 – Gitteroktaeder:

Der Punkt $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ kann nach der Voraussetzung über die Bedingungen (5.7) ausgeschlossen werden.

Für die anderen Punkte von M gehen wir nach dem gleichen Schema wie bei Typ 2–Gitteroktaedern vor:

Konvexkombination	Widerspruch zu
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	(5.5),

$$\begin{array}{rr}
\text{Konvexkombination} & \text{Widerspruch zu} \\
\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & (5.6), \\
\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & (5.1), \\
\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} & (5.5), \\
\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & (5.6), \\
\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} & (5.7), \\
\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} & (5.6).
\end{array}$$

Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Korollar 5.1. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 5.2. Ist* $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ *ein Gitteroktaeder vom Typ 1, und liegen Punkte aus der Menge* $\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}_V\right\}$ *auf dem Rand von* K*, so können nur die folgenden Punkte zusätzlich auf dem Rand von* K *liegen:*

Ist $(-1,\, 0,\, 1)_V \in \partial\mathrm{K}$*:* $(\pm s_1)_V$ *und* $(\pm s_2)_V$*, wobei*

$$s_1 := \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \qquad s_2 := \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

ist $(0,\, 1,\, -1) \in \partial\mathrm{K}$*:* $(\pm r_1)_V$ *und* $(\pm r_2)_V$*, wobei*

$$r_1 := \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}, \qquad r_2 := \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

und falls $(1,\, -1,\, 0) \in \partial\mathrm{K}$*:* $(\pm t_1)_V$ *und* $(\pm t_2)_V$*, wobei*

$$t_1 := \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad t_2 := \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}. \tag{5.12}$$

Beweis. Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, daß $v_i = e_i$ gilt, indem gegebenenfalls K mit $V^{-1}\mathrm{K}$ und Λ mit $V^{-1}\Lambda$ identifiziert wird.

Dann folgen die Behauptungen aber sofort aus dem Beweis des Satzes 5.2, denn die Voraussetzung, daß $F(-1,\, 0,\, 1) > 1$ war, haben wir nur benutzt, um zu zeigen, daß $\pm s_1$ und $\pm s_2$ nicht auf dem Rand lagen. Analoges gilt für $\pm r_{1,2}$ und $\pm t_{1,2}$. $\square$

Korollar 5.2. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 5.2. Ist* $\mathfrak{CP}(v_1, v_2, v_3)$ *ein Gitteroktaeder vom Typ 2, und liegen Punkte aus der Menge* $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_V, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_V \right\}$ *auf dem Rand von* K*, so können nur die folgenden weiteren Punkte auf dem Rand von* K *liegen:*

Für $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)_V \in \partial\mathrm{K}$ *die Punkte* $(\pm u_1)_V$ *und* $(\pm u_2)_V$*, wobei*

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

sowie für $c \in \{0, 1\}$ *höchstens je eines der 3 Paare von Punkt und Gegenpunkt*

$$\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\left(c+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}_V, \qquad \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \left(c+\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_V, \qquad \pm \begin{pmatrix} \left(c+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_V.$$

Für $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_V \in \partial\mathrm{K}$ *die Punkte* $(\pm v_1)_V$ *und* $(\pm v_2)_V$*, wobei*

$$v_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

sowie für $c \in \{0, 1\}$ *höchstens je eines der folgenden 3 Paare*

$$\pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \left(c+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}_V, \qquad \pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \left(c+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_V, \qquad \pm \begin{pmatrix} -\left(c+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_V.$$

Und für $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_V \in \partial\mathrm{K}$ *die Punkte* $(\pm w_1)_V$ *und* $(\pm w_2)_V$*, wobei*

$$w_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

sowie für $c \in \{0, 1\}$ *höchstens je eines der folgenden 3 Paare*

$$\pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \left(c+\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}_V, \qquad \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\left(c+\frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_V, \qquad \pm \begin{pmatrix} \left(c+\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_V.$$

Beweis. Wir können durch Identifikation von K mit V^{-1}K und Λ mit $V^{-1}\Lambda$ wieder o.B.d.A. annehmen, daß $v_i = e_i$ gilt.

Die 3 Aussagen des Satzes sind bis auf das Vertauschen der Koordinaten völlig gleichartig; mehr noch, der Beweis einer der 3 Aussagen ist unabhängig von den anderen beiden, so daß der Beweis bis auf Koordinatentausch in allen 3 Fällen gleichartig geführt werden kann.

Betrachten wir also nur den Fall, daß $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ auf dem Rand von K liegt.

In Satz 5.2 konnten die Punkte $\pm u_1$ nicht auf dem Rand des Körpers K liegen, weil der Punkt p außerhalb von K lag, aber als Konvexkombination von u_1 und 2 weiteren Punkten aus K dargestellt werden kann. In der jetzigen Situation liefert diese Tatsache aber keinen Widerspruch mehr, denn die konvexe Hülle dieser 3 Punkte kann zum Beispiel in einer Facette von K liegen.

Ebenso kann man hier nur noch $F(1,0,-1) + F(0,1,0) \geq F(1,1,-1) \geq 2$ statt vorher > 2 folgern; damit kann nun auch u_2 auf dem Rand von K liegen.

Da für alle anderen Punkte mit ganzzahligen Koordinaten der Beweis aus Satz 5.2 gültig bleibt, sind nur noch die Punkte mit halbzahligen Koordinaten zu betrachten. Nach Bemerkung 5.1 gilt der Beweis ebenfalls noch, es sei denn, es handelt sich um einen Punkt, bei dem zwei Koordinaten den Eintrag $\frac{1}{2}$ und die dritte die Form $c + \frac{1}{2}$ mit $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ hat. Die Vorzeichen der Koordinaten richten sich nach den Vorzeichen von p, hier also $(+,+,-)$, denn die Argumentation in Satz 5.2 und Bemerkung 5.1 war 'bis auf Vertauschung von Koordinatenvektoren untereinander und gegen ihre Negativen' geführt worden. Daher kommen zum Beispiel Punkte der Form $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -(c + \frac{1}{2})\right)$ in Frage.

Kann nun c beliebig groß sein? Nein, es kommen sogar nur $c = 0$ (das ist immer p selbst), und $c = 1$ in Frage, denn

$$2F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -(c + \tfrac{1}{2})\right) + F\left(-1,0,0\right) + F\left(0,-1,0\right) \geq F\left(0,0,-(2c+1)\right) \;=\; 2c+1$$

und daher

$$F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -(c + \tfrac{1}{2})\right) \geq \tfrac{2c-1}{2}$$

und $\frac{2c-1}{2} > 1$ für $c \geq 2$.

Also kommen höchstens die 3 im Satz unter (5.13) aufgeführten Punkte mit halbzahligen Koordinaten und ihre Gegenpunkte in Frage. Daß nicht zwei von Ihnen zugleich auf dem Rand von K liegen können, sieht man so:

Angenommen es lägen zum Beispiel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$ gleichzeitig auf dem Rand von K, während auch p darauf liegt. Nach Voraussetzung ist $0 \in$ K, und bildet mit den 3 erstgenannten Punkten ein System von 4 affin unabhängigen Punkten in K. Daher müßte wegen der folgenden Konvexkombination p im Inneren von K liegen, ein Widerspruch zur

Voraussetzung:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=p.$$

Damit ist der Satz für den Fall von p bewiesen. Wie eingangs schon bemerkt, folgen die anderen beiden Aussagen auf die gleiche Art und Weise. □

5.2 Sehnenlänge

Im folgenden soll ein Satz formuliert werden, der für eine sehr spezielle Situation in Dimension 3 den Satz 4.1 verschärft. Dazu führe ich zunächst den Begriff der *Sehnenlänge* eines konvexen Körpers ein.[1]

Wir setzen K als zentralsymmetrischen konvexen Körper voraus, der volldimensional, beschränkt und abgeschlossen sei. Zunächst ist die Dimension d noch beliebig. Ein Vektor $v \neq 0$ sei vorgegeben und $B = (v, b_1, \dots, b_{d-1})$ sei eine Basis des $\mathbb{R}^d$, die v enthält.

Definition 5.1. Es sei π die Projektion auf das Komplement von v,

$$\pi : \mathbb{R}^d \twoheadrightarrow \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v)^{\perp} \subset \mathbb{R}^d.$$

Mit G_p für $p \in \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir die Gerade mit Fußpunkt p und Richtung v,

$$G_p = \{x \,|x = p + \lambda v, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Der Schnitt einer jeden solchen Gerade mit K ist entweder ein Geradensegment positiver Länge (eine Sehne in K), ein Punkt, oder leer.

Die *Sehnenlänge* $\theta_v(p)$ in Richtung v am Punkt $p \in \mathbb{R}^d$ definieren wir als

$$\theta_v(p) := \operatorname{diam}(G_p \cap \mathrm{K})$$

wobei $\operatorname{diam}(\emptyset) := 0$ gesetzt sein soll.

Lemma 5.1 (Eigenschaften des Funktionals θ_v).

1. *θ_v ist invariant auf Geraden mit Richtungsvektor v.*
2. *Für $p \in \mathbb{R}^d$ gilt: Ist $\pi(p) \in \operatorname{relint}(\pi(\mathrm{K}))$, so gilt $\theta_v(p) > 0$.*
3. *θ_v ist stetig für Punkte in $\overset{-1}{\pi}(\operatorname{relint}(\pi(\mathrm{K})))$.*
4. *Es ist $E := \pi\left(\overset{-1}{\theta_v}(\{t \geq \rho\})\right) \subset \pi(\mathrm{K})$ für jedes $\rho > 0$. Dabei bezeichnet $\overset{-1}{\theta_v}$ die mengentheoretische Umkehrabbildung von θ_v.*

[1] Dieser Abschnitt ist eine Ausarbeitung der Projektionsargumentation von MINKOWSKI auf Seite 16 in [20].

5. *E ist zentralsymmetrisch mit Mittelpunkt* 0.

Beweis.

1. Ist aus der Defininition von θ_v offensichtlich.

2. Ist $d = 1$, so ist nichts zu zeigen, da $\pi(\mathrm{K})$ kein Inneres hat. Es sei also $d \geq 2$. (Kontraposition) Angenommen es ist $\theta_v(p) = 0$, dann trifft die Gerade G_p den Körper K nicht oder nur in einem Punkt p'. Die Geraden G_p sind gerade die Fasern der Projektion π, also liegt, falls der Schnitt leer ist, $\pi(p)$ außerhalb von $\pi(\mathrm{K})$. Ist der Schnitt gerade der Punkt p', so wählen wir eine Trennebene für K und $G_{p'}$. Diese enthält $G_{p'}$, weil sie durch p' geht, und unter der Projektion π erhalten wir eine Trennebene für $\pi(\mathrm{K})$ und $\pi(p')$. Also ist $\pi(p)$ kein relativ innerer Punkt von $\pi(\mathrm{K})$.

3. Ist K ein Polytop, so ist der Rand von K stückweise linear, so daß die Stetigkeit von θ_v offensichtlich ist. Ein beliebiger konvexer Körper lässt sich durch ein Polytop von außen und von innen beliebig gut approximieren, so daß θ_v von oben und von unten durch stetige Funktionen approximiert werden kann, also selbst stetig sein muß.

4. Es ist $\overset{-1}{\theta_v}(\{t > 0\}) \supset \overset{-1}{\theta_v}(\{t \geq \rho\})$. Liegt aber p in ersterer Menge, dann hat G_p mit K eine Strecke gemeinsam, die auf einen Punkt in $\pi(\mathrm{K})$ projiziert wird.

5. Ist $p \in E \setminus \{0\}$, so seien p_1 und p_2 die beiden Durchstoßpunkte der Gerade G_p in K. Da K zentralsymmetrisch bzgl. 0 ist, spannen die Punkte $p_1, p_2, -p_1, -p_2$ ein Parallelogramm auf, also liegt $-p \in E$.
   E ist konvex, denn zu zwei Punkten $p, q \in E$ mit den dazugehörigen Durchstoßpunkten p_1, p_2, q_1, q_2 liegt das Trapez p_1, p_2, q_2, q_1 in K, also ist θ_v entlang der Strecke $\overline{p_2 q_2}$ größer oder gleich $\min\{\theta_v(p), \theta_v(q)\} \geq \rho$.
   Da zu p der Punkt $-p$ in E liegt, ist wegen der Konvexität auch 0 in E, und damit offenbar Mittelpunkt.

□

Das Funktional θ_v mißt offenbar die Dicke von K entlang der durch die Gerade G_p bestimmten Sehne von K.

Satz 5.3. *Sei Λ ein zulässiges Gitter für $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^3$ mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$. Wir setzen $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sind die Punkte der Menge*

$$Q = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \pm(v_1)_B, \pm(v_2)_B \right\}$$

oder $Q \cup \{\pm(w_1)_B\}$ oder $Q \cup \{\pm(w_2)_B\}$ oder $Q \cup \{\pm(w_1)_B, \pm(w_2)_B\}$ die einzigen Gitterpunkte auf $\partial\mathrm{K}$, dann ist Λ nicht kritisch, oder es gibt ein zulässiges Gitter gleicher Determinante, so daß mehr Gitterpunkte auf dem Körper K liegen.

Beweis. O.B.d.A gelte $b_i = e_i$ indem wir wie schon früher K mit B^{-1}K und Λ mit $B^{-1}\Lambda$ identifizieren.

Zunächst stellen wir fest, daß die Punkte $\pm w_1$ und $\pm w_2$ nie im Inneren von K liegen können, solange v_1 und v_2 auf ∂K liegen, denn $F(\pm 1, 0, \pm 1) + F(\mp 1, 0, \pm 1) \geq F(0, 0, \pm 2) = 2$ und $F(0, \pm 1, \pm 1) + F(0, \pm 1, \mp 1) \geq F(0, \pm 2, 0) = 2$.

Wir benutzen e_3 als Richtungsvektor für das Sehnenfunktional und bezeichnen mit π wieder die Projektion längs e_3. Es sei $\overline{\mathrm{K}} := \pi(\mathrm{K})$ und $E := \pi\left(\overset{-1}{\theta_{e_3}}(\{t \geq 1\})\right)$. Nach dem letzten Lemma ist E konvex mit Mittelpunkt 0 und in $\overline{\mathrm{K}}$ enthalten.

Nach Voraussetzung liegen v_1 und e_1 auf K. Es ist $e_1 - v_1 = e_3$, genauso ist $e_2 - v_2 = e_3$, also $\theta_{e_3}(e_1) \geq 1$ und $\theta_{e_3}(e_2) \geq 1$. Nach Wahl der Basis spannen e_1 und e_2 den $\overline{\mathrm{K}}$ enthaltenden Unterraum auf, also liegen die Punkte e_1 und e_2 in E.

Läge e_2 im Inneren von E, so existierte eine Umgebung U von e_2, in der $\theta_{e_3}(p) \geq 1$ für jedes $p \in U$ gälte. Daher sind die Stützebenen in e_2 und v_2 an K nicht gleich; sie sind daher sogar parallel mit Abstand $\|e_3\| = 1$. Das ist aber ein Widerspruch, denn $\theta_{e_3}(0) = 2 \cdot \|e_3\| = 2$, da K zentralsymmetrisch ist.

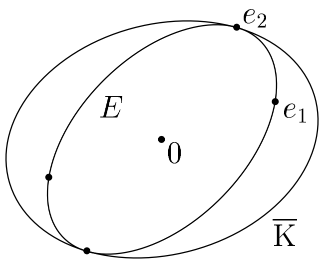

Abbildung 5.1

Daher liegt e_2 auf dem Rand von E, und man kann e_2 auf dem Rand von K stetig so bewegen, daß e_2 auf dem Rand von E verbleibt und der Abstand von e_2 zur Gerade G durch 0 und $\pi(e_1)$ sich nicht vergrößert. Dabei bleiben die Punkte e_1, e_2, e_3, v_1 offensichtlich auf K. Falls nun e_2 auch Randpunkt von $\overline{\mathrm{K}}$ ist, so enthält K in Richtung e_3 eine Strecke der Länge $\geq \|e_3\|$, also kann e_2 (ggf. durch Addition eines Anteils in Richtung von e_3, ohne Determinantenveränderung) so gewählt werden, daß auch v_2 auf K liegt. Die Lagebeziehung der Punkte kann man sich anhand von Abbildung 5.1 vorstellen, die [20] entnommen ist.

Für $x \in \operatorname{relint}(\mathrm{K})$ gilt immer $\pi(x) \in \partial E \Rightarrow \theta_{b_3}(x) = 1$, denn angenommen es gäbe ein x mit $\pi(x) \in \partial E$ und $\pi(x) \notin \partial\overline{\mathrm{K}}$, aber $\theta_{e_3}(x) = l > 1$, dann hat x eine zylinderförmige Umgebung mit Höhe $l_1 > 1$ und $l_1 < l$, die ganz in K liegt, und deren θ_{e_3}-Wert $\geq l_1$ ist, also wäre x kein Randpunkt von E. Widerspruch. Falls also e_2 echt im Inneren von K liegt, so muß daher v_2 auf dem Rand von K liegen.

Dies können wir so lange fortsetzen, bis der Abstand zur Gerade G kleiner wird, oder aber ein weiterer Gitterpunkt auf dem Körper K zu liegen kommt. Im ersten Falle sinkt die Gitterdeterminante, also war das ursprüngliche Gitter nicht kritisch; im zweiten Falle haben wir ein Gitter gleicher Determinante gefunden, bezüglich dessen (mindestens) ein weiterer Gitterpunkt auf K liegt. $\square$

Satz 5.4. *Sei Λ ein zulässiges Gitter für den Körper* K *und $\mathfrak{CP}(b_1, b_2, b_3)$ ein Gitteroktaeder vom Typ 2 in* K. *Sind die Punkte der Menge*

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B \right\}$$

die einzigen Gitterpunkte auf $\partial\mathrm{K}$*, so ist* Λ *nicht kritisch für* K*, oder es gibt ein zulässiges Gitter gleicher Determinante für* K*, so daß mehr Gitterpunkte auf* $\partial\mathrm{K}$ *liegen. Diese Aussage bleibt auch gültig, wenn zusätzlich einige oder alle Punkte der Menge*

$$R' := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B \right\}$$

auf $\partial\mathrm{K}$ *liegen.*

Beweis. Indem gegebenenfalls K durch $B^{-1}\mathrm{K}$ und Λ durch $B^{-1}\Lambda$ ersetzt wird, können wir annehmen, daß $b_i = e_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt.

Solange die Punkte der Menge R auf $\partial\mathrm{K}$ liegen, kann kein Punkt der Menge R' im Inneren von K liegen, denn wegen

$$F(0,1,-1) + F(1,0,0) \geq F(1,1,-1) = 2F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = 2$$

ist $F(0,1,-1) \geq 1$, so daß

$$F(0,1,-2) + F(0,1,0) \geq 2F(0,1,-1) \geq 2$$

und

$$F(0,-2,1) + F(0,0,1) \geq 2F(0,-1,1) \geq 2$$

gelten. Für die anderen beiden Punktepaare finden sich die Beziehungen

$$F(1,0,-1) + F(0,1,0) \geq F(1,1,-1) = 2F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}) = 2$$

und

$$F(1,-1,0) + F(0,0,1) \geq F(1,-1,1) = 2F(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 2.$$

Daher ist die zweite Aussage des Satzes richtig, wenn nur der erste Teil bewiesen ist. Dies geschieht ähnlich wie Satz 5.3.

Diesmal dient zur Projektion der Vektor $z := b_2 - b_3$. Wir definieren diesmal $\overline{\mathrm{K}} := \theta_z(\mathrm{K})$ und $E := \pi\left(\overset{-1}{\theta_z}(\{t \geq \|z\|\})\right)$. Nun kann wie im letzten Beweis argumentiert werden. Der Punkt b_1 bleibe fest. Wir bewegen b_2 so auf dem Rand von K, daß $\pi(b_2)$ auf dem Rand von E bleibt und $\pi(b_2)$ sich der Gerade durch 0 und $\pi(b_1)$ annähert. Hierbei bleibt, falls $\pi(b_2) \in \mathrm{int}\left(\overline{\mathrm{K}}\right)$ gilt, wegen der Definition von E auch b_3 auf dem Rand von K. Ansonsten kann b_2 im Rand von K in z-Richtung so verschoben werden, daß b_3 auf dem Rand von K zu liegen kommt, ohne das sich die Determinante des Gitters verändert. Dabei bleibt $z = b_2 - b_3$ immer konstant, so daß auch $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}z$, und $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - z$ konstant bleiben. Dies läßt sich fortsetzen bis entweder ein weiterer Gitterpunkt auf $\partial\mathrm{K}$ auftritt oder die Gitterdeterminante sinkt, was zu beweisen war. $\square$

Satz 5.5. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 5.4. Liegen nur die Punkte der Menge*

$$S := \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}_B \right\}$$

auf dem Rand von K*, so ist ist das Gitter nicht kritisch, oder es gibt ein zulässiges Gitter, bei dem mehr Gitterpunkte auf* ∂K *liegen. Diese Aussage bleibt richtig, wenn zusätzlich einige oder alle der Gitterpunkte aus*

$$S' := \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \pm \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \right\}$$

auf dem Rand von K *liegen.*

Beweis. Der Satz läßt sich fast vollständig wie Satz 5.4 beweisen, wenn man nur b_1 und b_2 vertauscht. Einzig die Lage von $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ muß hier noch behandelt werden. Dies ist aber einfach:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{K}}^B(-1,1,0) + F_{\mathrm{K}}^B(0,0,1) &\geq 2F_{\mathrm{K}}^B(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 2 \\ F_{\mathrm{K}}^B(-2,1,0) + F_{\mathrm{K}}^B(0,1,0) &\geq 2F_{\mathrm{K}}^B(-1,1,0) \geq 2 \\ F_{\mathrm{K}}^B(-1,0,1) + F_{\mathrm{K}}^B(0,1,0) &\geq 2F_{\mathrm{K}}^B(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 2. \end{aligned}$$

□

5.3 Klassifikationssatz

Satz 5.6 (Satz aus Abschnitt 21 in [20]). *Sei* K $\in \mathfrak{K}^3$ *ein (nicht notwendig zentralsymmetrischer!) konvexer Körper. Dann existiert ein ein kritisches Gitter* Λ *von* K *mit Basis* $B = (b_1, b_2, b_3)$*, das von einem der folgenden* 3 *Typen ist:*

Typ 1 *Auf dem Rand von* $\mathcal{D}$K *liegen die Punkte*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \tag{5.16a}$$

und die Punkte

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B \tag{5.16b}$$

liegen außerhalb.

Falls außerdem alle auf dem Rand von $\mathcal{D}$K *vorkommenden Gitterpunkte nur Gitteroktaeder erster Art bilden, so liegen in diesem Falle zwangsläufig alle Gitterpunkte außer den* 6 *angegebenen Punkten und ihren Gegenpunkten außerhalb des Körpers. So ein Gitter soll* Gitter vom Typ 1 *genannt werden.*

Typ 2a *Auf dem Rand von* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ *liegen die Punkte*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_B \tag{5.17a}$$

und der Punkt

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_B \tag{5.17b}$$

liegt außerhalb. Diese Art Gitter nennen wir Gitter vom Typ 2a.

Typ 2b *Auf dem Rand von* $\mathcal{D}\mathrm{K}$ *liegen die Punkte*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}_B, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}_B. \tag{5.18}$$

So ein Gitter heiße Gitter vom Typ 2b.

Für den Beweis erinnern wir zunächst daran, daß es keine Einschränkung darstellt, wenn wir annehmen, daß K bereits zentralsymmetrisch ist (vgl. Satz 2.3 und Satz 2.2). Es kann auch, durch Identifikation von K mit $B^{-1}\mathrm{K}$ und Λ mit $B^{-1}\Lambda$, angenommen werden, daß $b_i = e_i$ gilt.

Der Beweis ist eine lange Fallunterscheidung in den Ungleichungen (5.5)-(5.8).

Beweis. Wir führen den Beweis in zwei Teilen, je nach dem, ob auf dem Körper Punkte liegen, die ein Gitteroktaeder von 2. Art bilden oder nicht.

- **Nur Typ-1 Gitteroktaeder sind in K enthalten:**

In diesem Teil des Beweises soll das Gitter nie so geartet sein, daß wir in $\partial\mathrm{K} \cap \Lambda$ 3 linear unabhängige Punkte finden, die ein Gitteroktaeder 2. Art bestimmen.

1. Fall

Angenommen es läge $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ auf K, dann bestimmt dieser Punkt zusammen mit $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ gemäß Korollar 4.1 ein Gitteroktaeder des Typs 2, was wir ausgeschlossen haben. Auf die gleiche Art und Weise können wir für alle Punkte aus (5.7) in diesem Teil des Beweises ausschließen, daß sie auf K liegen.

2. Fall

Bisher liegen nur die 6 Gitterpunkte aus (5.1) auf K; gemäß Satz 4.2 müssen wir für ein kritisches Gitter mindestens 12 Gitterpunkte finden. Daher muß nach Satz 5.2 mindestens einer der Punkte aus (5.5) oder (5.6) auf K auftreten.

In diesem Fall erwägen wir nur die Möglichkeit, daß wir einen Punkt aus (5.5) finden.

1. $S = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-S$ liegen auf K. Nach Korollar 5.1 können nun die Punkte $\pm s_1$ und $\pm s_2$ aus (5.10) ebenfalls auf K liegen. Allerdings bilden $\pm s_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ jeweils ein Gitteroktaeder 2. Art, kommen also in diesem Teil des Beweises nicht in Frage.

Fall 2.a): $\pm s_1$ nicht auf K.

Da wir bisher nur 8 Gitterpunkte auf K haben, können wir aus (5.5) einen weiteren Punkt auswählen:

(a) $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $-R$: möglich.

(b) $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-T$: möglich.

(c) $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-Q$: Durch Tausch von $B \leftrightarrow -B$ geht Q in T über, während S invariant bleibt, also ist dies nichts Neues.

(d) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-P$: Durch Tausch von $B \leftrightarrow -B$ geht P in $-R$ über, ohne daß S modifiziert wird, also nichts Neues.

(e) $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-N$: möglich.

Wir müssen also die Fälle wo S und einer der Punkte R, T oder N auftritt weiter betrachten.

Fall 2.a)i): S und R

Wir können noch einen Punkt wählen:

(a) $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-T$: möglich.

(b) $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-Q$: Mit $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ finden wir ein Gitteroktaeder 2. Art, also kommt Q nicht vor.

(c) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-P$: Nach Satz 5.3 können wir zusätzlich noch einen weiteren Punkt auf K annehmen. T ist möglich, Q wie bereits in (b) gesehen nicht, und wenn N auftreten würde, könnten wir erneut Satz 5.3 anwenden und wieder T wählen, Q jedoch immer noch nicht.

(d) $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-N$. Wegen Satz 5.3 ist die Situation dieselbe wie in (c): Es tritt T auf K auf, denn Q kann nicht auftreten, und wenn P auftritt, können wir trotzdem noch den letzten verbliebenen Punkt T wählen.

Zusammenfassend gesagt findet man zu S und R auf jeden Fall auch T auf dem Rand von K. Desweiteren bildet der Punkt N mit R und T ein Gitteroktaeder zweiter Art, wie auch P, S und T, also können wir *im Nachhinein* N und P in diesem Zweig der Fallunterscheidung ausschließen. Das bedeutet, daß hier die *Basisvektoren und* S, R, T *die einzigen Gitterpunkte* auf dem Körper K sind (bis auf ihre Gegenpunkte).

Fall 2.a)ii): S und T

Durch Vertauschen von A gegen C (wobei $\pm S \leftrightarrow \mp S$ und $\pm R \leftrightarrow \mp T$) läßt sich dieser Fall auf Fall 2.a)i) zurückführen.

Fall 2.a)iii): S und N

Wir können nach Satz 4.2 noch einen Punkt wählen:

(a) $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $-R$: Dies ist Fall 2.a)i)d).

(b) $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-T$: Dies ist (nachdem wie in 2.a)ii) die Vektoren A und C getauscht wurden) wieder Fall 2.a)i)c).

(c) $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-Q$: Durch $B \leftrightarrow -B$ ist dies 2.a)iii)b). Dabei bleiben S und N invariant.

(d) $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-P$: Durch $B \leftrightarrow -B$ ist dies 2.a)iii)a). Dabei bleiben S und N invariant.

Fall 2.b): $\pm s_1$ liegt auf K.

Durch die unimodulare Transformation $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ führt man dies auf den Fall 2.a)iii) zurück.

2. $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $-R$ liegen auf K. Durch Tausch $A \leftrightarrow B$ können wir diesen Fall genauso behandeln wie oben ($-R \leftrightarrow S$).

3. $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-T$ liegen auf K. Durch Tausch $B \leftrightarrow C$ überführen wir $-T \leftrightarrow S$, und können wieder wie für S argumentieren.

4. $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $-Q$. Hier können wir durch Tausch von $B \leftrightarrow -C$ erreichen, daß $Q \leftrightarrow S$, und dann argumentieren wir wie oben.

5. $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-P$. Durch Tausch von $B \leftrightarrow -A$ erreichen wir $P \leftrightarrow S$.

6. $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $-N$. Tausch von $A \leftrightarrow -A$ läßt uns hier $N \leftrightarrow S$ erreichen.

3. Fall

Falls irgend ein Punkt aus (5.6) auf der Hülle von K liegt, so können wir durch unimodulare Transformation o.E. annehmen, daß dies $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sei. Durch die unimodulare Transformation

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

führen wir diesen auf den 2. Fall zurück, in dem nur die Punkte aus (5.1) und $\pm S, \pm R, \pm T$ auf K liegen. Φ bildet wie folgt ab: Die Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gehen (in dieser Reihenfolge) über in

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = T, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = R \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S.$$

Insbesondere liegen alle Punkte, die Urbilder von Punkten aus (5.6) sind, außerhalb von K oder bestimmen, wenn sie auf K liegen sollten, ein Gitteroktaeder 2. Art.

Insgesamt besagen Fall 1–3: Falls nur solche Gitter betrachtet werden, bei denen nie ein Gitteroktaeder 2. Art in K enthalten ist, so können bis auf unimodulare Transformationen nur solche Gitter kritisch sein, bei denen die Basisvektoren und die Punkte S, R, T auf K liegen. Damit so ein Gitter zulässig für K ist, brauchen die Ungleichungen (5.5) und (5.7) nicht mehr gesondert gefordert werden. Das besagt gerade die Fallunterscheidung: entweder hätte man Gitteroktaeder 2. Art in K, oder die Punkte werden durch die Basisvektoren und S, R und T bereits aus dem Inneren von K verdrängt. Läge $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ auf K, so bilden $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Gitteroktaeder 2. Art, außerdem ist $F(\pm 1, \pm 1, \pm 1) + F(\mp 1, 0, \pm 1) + F(0, \mp 1, 1) \geq 3F(0, 0, \pm 1)$, so daß der Punkt zwangsläufig außerhalb von K zu liegen hat. Nur die verbliebenen 6 Ungleichungen aus 5.6 bleiben gesondert zu fordern:

$$F(\mp 1, \pm 1, \pm 1) \geq 1, \qquad F(\pm 1, \mp 1, \pm 1) \geq 1, \qquad F(\pm 1, \pm 1, \mp 1) \geq 1.$$

Wenn zum Beispiel die erste dieser Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt wäre, so würden $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Gitteroktader 2. Art aufspannen. Daher müssen diese 6 alle *außerhalb* von K liegen. Das ist gerade (5.16).

Nun folgt der zweite Teil des Beweises.

- **Für sonstige Gitter:**

In diesem Teil des Beweises wissen wir, daß es 3 Gitterpunkte auf K gibt, die ein Gitteroktaeder 2. Art bestimmen und die wir als v_1, v_2 und v_3 wählen. Dann können wir wieder durch Identifikation von K mit V^{-1}K und Λ mit $V^{-1}\Lambda$ annehmen, daß $v_i = e_i$ gilt.

Nach Satz 4.2 und Korollar 5.2 muß mindestens ein Punkt aus (5.8) auf K liegen. Indem ggf. die Koordinaten vertauscht werden, sei dies o.E. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nach Korollar 5.2 müssen wir für die weiteren 4 Punkte außer mit den verbliebenen aus (5.8) auch mit $\pm u_1$ und $\pm u_2$ aus (5.13) rechnen. Allerdings liegt mit u_2 auch $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und mit u_1 auch $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}u_1 + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf K, denn lägen diese Punkte im Inneren des Körpers, so wäre das Gitter nicht mehr zulässig.

Auf jeden Fall liegen also e_1, e_2, e_3 und $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ auf K. Nun unterscheiden wir die folgenden Fälle:

1. Keiner der Punkte aus Korollar 5.2 liegt auf K:
   Satz 4.2 besagt, daß so ein Gitter nicht kritisch sein kann, also müssen wir einen weiteren Punkt aus (5.8) auf K finden. Indem ggf. die Vorzeichen des ersten oder zweiten Basisvektoren vertauscht werden, sei dies ohne Einschränkung der Punkt $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
   Dieses Gitter ist nach Satz 5.5 entweder noch nicht kritisch, oder aber es kann bei gleichbleibender Determinante in eines transformiert werden, in dem ein weiterer Gitterpunkt auf K zu liegen kommt. Dieser Punkt kann aus (5.8) gewählt werden, denn bei den ansonsten in Frage kommenden Punkten (v_1, v_2, u_1, u_2 aus Korollar 5.2) läßt sich der Satz erneut anwenden.
   Ohne Einschränkung sei der gefundene Punkt $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2. u_2 ist weiterer Gitterpunkt auf K:
   Wie schon oben bemerkt, hat dies zur Folge, daß auch $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ auf K liegt. Damit ist erneut die Argumentation aus 1. mit Satz 5.5 anwendbar.

3. u_1 ist weiterer Gitterpunkt auf K:
   Wie oben bemerkt, liegt hier auch $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ auf K.
   In diesem Fall benutzen wir Satz 5.4 und finden ohne Einschränkung den Punkt $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Sowohl u_1 als auch u_2 liegen auf K:
   Sowohl $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ als auch $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ sind auf K zu finden.

Zusammenfassung: Wir finden immer ein kritisches Gitter für K, in dem die Gitterpunkte $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und die Punkte aus (5.1) auf K liegen.

Mit Hilfe von Satz 4.3 kann man feststellen, welche Koordinaten diese Punkte bezüglich des Gitters haben. Die im Satz angegebene Transformation von (v_1, v_2, v_3) in eine Gitterbasis (l_1, l_2, l_3) ist $\mathfrak{B} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$; anschließend transformieren wir das Gitter noch unimodular mit $U = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Insgesamt führen wir also die Transformation

$$\Psi = U \circ \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch. Dabei transformieren sich die Punkte wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

gehen über in

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

dabei liegen die ersten 6 Punkte und ihre Gegenpunkte auf dem Rand von K, der letzte Punkt entweder außerhalb oder ebenfalls auf dem Rand.

□

Nachdem der Klassifikationssatz garantiert, daß jeder konvexe Körper in $\mathfrak{K}^3$ ein kritisches Gitter von einer der drei sehr speziellen Gestalten besitzt, stellt sich die Frage nach einer Art Umkehrung dieser Aussage. Offenbar ist es sinnlos zu erwarten, daß ein von drei beliebigen Vektoren b_1, b_2, b_3 erzeugtes Gitter, das bezüglich K eine dieser Gestalten hat, schon kritisch sein könnte. Man kann aber erhoffen, daß so ein Gitter doch zumindest immer zulässig für K ist. Daß dies tatsächlich der Fall ist, wollen wir nun beweisen:

Satz 5.7. *Sei* $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^3$ *und* $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ *drei linear unabhängige Vektoren, so daß das von ihnen aufgespannte Gitter eine der drei Bedingungen aus Satz 5.6 erfüllt, also*

$$b_1, b_2, b_3, b_1 - b_2, b_1 - b_3, b_2 - b_3 \in \partial\mathcal{D}\mathrm{K} \text{ und } b_1 + b_2 - b_3, b_1 - b_2 + b_3, -b_1 + b_2 + b_3 \notin \mathcal{D}\mathrm{K}$$

oder

$$b_1, b_2, b_3, b_1 + b_2, b_1 + b_3, b_2 + b_3 \in \partial\mathcal{D}\mathrm{K} \text{ und } b_1 + b_2 + b_3 \notin \mathcal{D}\mathrm{K}$$

oder

$$b_1, b_2, b_3, b_1 + b_2, b_1 + b_3, b_2 + b_3, b_1 + b_2 + b_3 \in \partial\mathcal{D}\mathrm{K}$$

gilt. Dann ist das von $B = (b_1, b_2, b_3)$ *erzeugte Gitter zulässig für* K.

Beweis. Es stellt erneut keine Einschränkung dar, wenn wir $b_i = e_i$ für $i = 1, 2, 3$ annehmen, da K mit B^{-1}K und Λ mit $B^{-1}\Lambda$ identifiziert werden können. Wir können auch o.B.d.A $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}_0^3$ und daher $\mathrm{K} = \mathcal{D}\mathrm{K}$ annehmen.

Obwohl der Satz fordert, daß eine von drei möglichen Lagekonstellationen auftritt, ist die Unterscheidung der letzten beiden nicht wirklich nötig und nur angegeben, um maximal mögliche Symmetrie zu Satz 5.6 zu haben. Wir fassen für den Beweis statt dessen die letzten beiden Varianten zusammen und haben dann die Forderung an das von b_1, b_2, b_3 erzeugte Gitter, daß entweder die gleichen Punkte wie bei einem Typ-1 Gitter auf ∂K liegen, oder aber die eines Typ-2a Gitters mit der Modifikation, daß nur $F(1, 1, 1) \geq 1$ gefordert wird (F bezeichnet gemäß der Vereinbarung 5.1 wieder die Distanzfunktion von K zusammen mit der Basistransformation). Bezeichnet werden die beiden Konstellationen mit Typ 1 und Typ 2.

Es liegen nach Voraussetzung die Punkte (1, 0, 0), (0, 1, 0) und (0, 0, 1) auf ∂K. Im Falle eines Typ 2-Gitters liegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zumindest nicht im Inneren von K. Für Typ 1-Gitter sieht man dies wegen

$$F(0,1,1) + F(0,-1,1) \geq F(0,0,2) = 2,$$

$$F(1,1,1) + F(1,-1,0) + F(1,0,-1) \geq F(3,0,0) = 3$$

ein. Schließlich liegt der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ nicht im Inneren von K, denn es gilt

$$\begin{aligned} F(1,1,2) + F(-1,1,0) + 2F(0,-1,1) &\geq F(0,0,4) = 4 && \text{bei Typ 1,} \\ F(1,1,2) + F(1,1,0) &\geq F(2,2,2) \geq 2 && \text{bei Typ 2.} \end{aligned}$$

Damit ist die Voraussetzung geschaffen, wieder Satz 4.4 anzuwenden: Wenn $p \in \mathrm{K}$ nicht einer der Punkte aus der Menge M von (4.3) ist, so enthält das von e_1, e_2 und p erzeugte Oktaeder, das ganz in K liegt, einen der im letzten Absatz als *nicht im Inneren* von K liegenden Punkte als *inneren* Punkt, was ein Widerspruch ist. Daher muß nur noch gezeigt werden, daß die Punkte der Menge M aus (4.3) unter den gegebenen Voraussetzungen nicht im Inneren von K liegen können. Dies besagen die folgenden Ungleichungen; falls verschiedene Argumente nötig sind, so steht zuerst das für den Typ 1, dann das für den Typ 2.

$$F(0,1,2) + F(0,-1,0) \geq F(0,0,3) = 3.$$

$$\begin{aligned} F(1,2,2) + F(-1,0,0) &\geq F(0,2,2) = 2, \\ F(1,2,2) + F(1,0,0) &\geq F(2,2,2) \geq 2. \end{aligned}$$

$$F(1,1,3) + F(-1,0,0) + F(0,-1,0) \geq F(0,0,3) = 3.$$

$$\begin{aligned} F(1,2,3) + F(-1,1,0) &\geq F(0,3,3) = 3, \\ F(1,2,3) + F(1,1,0) + F(1,0,0) &\geq F(0,3,3) = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(2,2,3)+2F(-1,0,1)+2F(0,-1,1)&\geq F(0,0,7)=7,\\ F(2,2,3)+F(1,1,0)&\geq F(3,3,3)\geq 3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(1,2,4)+F(-1,0,1)+2F(0,-1,1)&\geq F(0,0,7)=7,\\ F(1,2,4)+F(-1,-1,0)+F(0,-1,0)&\geq F(0,0,4)=4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(2,3,4)+2F(-1,0,1)+3F(0,-1,1)&\geq F(0,0,9)=9,\\ F(2,3,4)+F(1,0,0)+F(1,1,0)&\geq F(4,4,4)\geq 4.\end{aligned}$$

Jede Permutation der Komponenten von p kann durch entsprechende Permutation der am Argument beteiligten Punkte genauso behandelt werden. Allerdings sind damit erst die möglichen Punkte aus dem $(+,+,+)$-Orthanten abgehandelt; die Punkte der anderen Orthanten folgen aber ganz ähnlich mit den folgenden Gleichungen (wegen der Zentralsymmetrie von K müssen nur noch die Orthanten $(-,+,+)$, $(+,-,+)$ und $(+,+,-)$ behandelt werden): Es liegen $(0,\ -1,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ 1)$ und seine Permutationen, sowie $(-1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ -1,\ 2)$ und $(1,\ 1,\ -2)$ nicht im Inneren von K:

$$F(0,-1,1)+F(0,1,1)\geq F(0,0,2)=2.$$

$$F(-1,1,1)+F(-1,-1,0)+F(-1,0,-1)\geq F(-3,0,0)=3.$$

$$\begin{aligned}F(-1,1,2)+F(1,-1,0)&\geq F(0,0,2)=2,\\ F(-1,1,2)+F(1,1,0)&\geq F(0,2,2)=2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(1,-1,2)+F(-1,1,0)&\geq F(0,0,2)=2,\\ F(1,-1,2)+F(1,1,0)&\geq F(2,0,2)=2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(1,1,-2)+F(-1,1,0)&\geq F(0,2,-2)=2,\\ F(1,1,-2)+F(-1,-1,0)&\geq F(0,0,-2)=2.\end{aligned}$$

Damit sind die Bezugspunkte für Satz 4.4 in den verbliebenen drei Orthanten als nicht im Inneren von K liegend nachgewiesen; es läßt sich also wie oben argumentieren. Die folgenden Ungleichungen schließen alle noch in Frage kommenden Punkte aus, was den Beweis beendet. Dabei wurden Ungleichungen, die sich nur durch Permutation von Komponenten von einer hier bereits aufgeführten unterscheiden, weggelassen.

$$F(0,-1,2)+F(0,1,0)\geq F(0,0,2)=2.$$

$$\begin{aligned}F(-1,2,2)+F(1,0,0)+2F(0,-1,1)&\geq F(0,0,4)=4,\\ F(-1,2,2)+F(1,0,0)&\geq F(0,2,2)=2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(1,-2,2)+F(-1,0,0)&\geq F(0,-2,2)=2,\\ F(1,-2,2)+F(-1,-1,0)+3F(0,1,1)&\geq F(0,0,5)=5.\end{aligned}$$

$$F(-1,1,3)+F(1,0,0)+F(0,-1,0)\geq F(0,0,3)=3.$$

$$F(1,1,-3)+F(-1,0,0)+F(0,-1,0)\geq F(0,0,-3)=3.$$

$$F(-1,2,3)+F(1,0,0)+2F(0,-1,1)\geq F(0,0,5)=5,$$

$$F(-1,2,3)+F(1,0,0)+F(0,1,0)\geq F(0,3,3)=3.$$

$$\begin{aligned}F(1,-2,3)+F(-1,0,1)+2F(0,1,0)&\geq F(0,0,4)=4,\\ F(1,-2,3)+2F(1,1,0)&\geq F(3,0,3)=3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(1,2,-3)+F(-1,1,0)&\geq F(0,3,-3)=3,\\ F(1,2,-3)+F(-1,0,-1)+2F(0,-1,-1)&\geq F(0,0,6)=6.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(-2,2,3)+2F(1,-1,0)&\geq F(0,0,3)=3,\\ F(-2,2,3)+2F(-1,-1,0)+4F(1,0,1)&\geq F(0,0,7)=7.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(2,2,-3)+2F(-1,1,0)&\geq F(0,0,-3)=3,\\ F(2,2,-3)+2F(-1,0,-1)+2F(0,-1,-1)&\geq F(0,0,7)=7.\end{aligned}$$

$$F(-1,2,4)+F(1,0,0)+2F(0,-1,0)\geq F(0,0,4)=4.$$

$$F(1,-2,4)+F(-1,0,0)+2F(0,1,0)\geq F(0,0,4)=4.$$

$$F(1,2,-4)+F(-1,0,0)+2F(0,-1,0)\geq F(0,0,-4)=4.$$

$$\begin{aligned}F(-2,3,4)+2F(1,-1,0)+F(0,-1,1)&\geq F(0,0,5)=5,\\ F(-2,3,4)+F(1,1,0)+F(1,0,0)&\geq F(0,4,4)=4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(2,-3,4)+F(0,1,0)+2F(-1,1,0)&\geq F(0,0,4)=4,\\ F(2,-3,4)+2F(1,1,0)+F(0,1,0)&\geq F(4,0,4)=4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(2,3,-4)+2F(1,-1,0)+F(0,-1,0)&\geq F(4,0,-4)=4,\\ F(2,3,-4)+2F(-1,-1,0)+F(0,-1,0)&\geq F(0,0,-4)=4.\end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Verfahren zur Bestimmung kritischer Gitter

Das letzte Kapitel liefert genug Ergebnisse, um das Ausgangsproblem

$$\min_{\Lambda \text{ zulässig für } \mathrm{K}} \det \Lambda,$$

bei dem das Minimum über die algorithmisch schwer greifbare Klasse aller zulässigen Gitter für einen konvexen Körper $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^3$ gebildet wird, in ein besser handhabbares umzuformen. Anstatt Gitter zu betrachten, die eine gewisse Eigenschaft *nicht* haben (nämlich *Punkte außer* 0 *im Inneren von* K), genügt es nach Satz 5.3, Gitter einer der drei dort definierten Typen zu betrachten um ein für K kritisches zu finden. Außerdem sind nach Satz 5.7 alle Gitter, die von einem dieser Typen sind, zulässig für K. Dies vereinfacht das Problem erheblich zu

$$\min \{\det \Lambda \mid \Lambda \text{ vom Typ 1 oder Typ 2a oder Typ 2b bzgl. K}\}.$$

Läßt sich nun der Körper K „gut“ beschreiben, so kann man hoffen, daß sich auch die Menge aller Gitter vom Typ 1, Typ 2a und Typ 2b „gut“ beschreiben läßt, das heißt so, daß eines mit minimaler Gitterdeterminante leicht zu finden ist. Dies ist die klassische Methode von MINKOWSKI, mit der er die dichteste Gitterpackung eines Oktaeders bestimmte. Tatsächlich läßt sich ein allgemeines Verfahren angeben, wenn K ein Polyeder ist.

Ziel dieses Kapitels soll es also sein, einen Algorithmus zu beschreiben, der für polyedrische zentralsymmetrische konvexe Körper K im $\mathbb{R}^3$ ein kritisches Gitter bestimmt. Für den Rest dieses Kapitels sei daher K ein zentralsymmetrisches Polytop, das durch k Facettenungleichungen ohne Redundanz als,

$$\mathrm{K} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax \leq 1\right\}$$

beschrieben ist, wobei A ist eine $k \times 3$-Matrix ist und 1 für einen k-dimensionalen Vektor von Einsen steht.

6.1 Gitter vom Typ 1

Es seien v_1, v_2, v_3 die Basisvektoren des Gitters. Für diese Klasse von Gittern wissen wir: v_1, v_2, v_3 und $(v_1 - v_2)$, $(v_2 - v_3), (v_3 - v_1)$ sowie ihre Gegenpunkte sind die *einzigen* Gitterpunkte auf K (vgl. Satz 5.6). Für jeden dieser Punkte existiert eine Zeile in A, so daß die zugehörige Ungleichung mit Gleichheit gilt. Seien diese Zeilen aus A mit $a_1, \dots, a_6$ bezeichnet[1], so ist das folgende Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{array}{rrrrrrl} & {a_1}^\intercal v_1 & & & & & = 1 \\ & & & {a_2}^\intercal v_2 & & & = 1 \\ & & & & & {a_3}^\intercal v_3 & = 1 \\ & {a_4}^\intercal v_1 & - & {a_4}^\intercal v_2 & & & = 1 \\ & & & {a_5}^\intercal v_2 & - & {a_5}^\intercal v_3 & = 1 \\ - & {a_6}^\intercal v_1 & & & + & {a_6}^\intercal v_3 & = 1 \end{array} \tag{6.1}$$

Dabei handelt es sich um ein 6×9-Gleichungssystem in den 9 Variablen v_{11}, v_{12}, v_{13}, $v_{21}, \dots, v_{33}$. Die Matrix sei mit M_1 bezeichnet.

Definition 6.1. Ist $L = (l_1, l_2, l_3)$ eine Lösung von (6.1), so soll die Determinante von L mit P_I bezeichnet werden:

$$P_I := \det L.$$

P_I ist, wenn der Rang von M_1 den Rang m hat, ein Polynom in $9 - m$ Variablen.

Das Argument im nächsten Lemma wird in diesem Kapitel noch öfter vorkommen, daher soll es hier explizit formuliert werden:

Lemma 6.1. *Ist ein Gitter Λ mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ vom Typ 1 kritisch für den Körper* K*, so besitzt $|P_I|$ für B ein lokales Minimum.*

Beweis. Sei Λ ein kritisches Gitter, und seien die 6 Punkte $b_1, b_2, b_3, b_1 - b_2, b_2 - b_3, b_3 - b_1$ und ihre Gegenpunkte die einzigen Gitterpunkte, die auf dem Körper K und den entsprechenden 12 Stützebenen liegen. Sei $\lambda_B = (\lambda_1, \dots, \lambda_{9-\mathrm{rang}(M_1)})$ als Variablenbelegung für P_I so gewählt, daß die Werte zu der Basis b^1, b^2, b^3 korrespondieren. Wäre λ_B kein lokales Minimum von $|P_I|$, so existerte in einer beliebig kleinen Umgebung von λ_B ein Punkt $\lambda_{B'}$, der zu einer Basis b_1', b_2', b_3' des $\mathbb{R}^3$ mit einer kleineren Deteminante führt. Da dieser Punkt beliebig nahe an λ_B liegt, könnten (nach unserer Annahme) nur die Punkte $\pm b_1', \pm b_2', \pm b_3', \pm(b_1' - b_2'), \pm(b_2' - b_3'), \pm(b_3' - b_1')$ in dem Körper K liegen. Sie sind aber nach Definition in den entsprechenden Stützebenen enthalten. Also ist das von ihnen aufgespannte Gitter zulässig, Widerspruch. Das bedeutet aber gerade, daß mit jedem kritischen Gitter vom Typ 1 ein lokales Minimum von $|P_I|$ assoziiert ist. □

Lemma 6.2. *Hat die Matrix M_1 nicht Rang* 6*, so ist das von v_1, v_2, v_3 aufgespannte Gitter nicht kritisch für* K.

[1] Die a_i sind nicht notwendig verschieden.

Diese Feststellung stammt aus einer noch nicht veröffentlichten Arbeit [14] von M. Henk und U. Betke.

Beweis. Es sind die 3 Vektoren $(a_1,\ 0,\ 0)\,, (0,\ a_2,\ 0)\,, (a_4,\ -a_4,\ 0)$ linear unabhängig, denn wären sie linear abhängig, so gälte (weil a_1, a_2 und a_4 facettendefinierend sind) $a_1 = \pm a_4$ und $a_2 = \mp a_4$, also entweder $a_1 = a_4 = \mp a_2$, oder $a_1 = -a_4 = \pm a_2$. Jede dieser Kombinationen führt jedoch zu einem Widerspruch in der 4. Gleichung von (6.1), die nach Voraussetzung $= 1$, nach Einsetzen von ${a_1}^\intercal v_1 = 1$ und ${a_2}^\intercal v_2 = 1$ jedoch den Wert 0 oder ± 2 (je nach Vorzeichenkombination) haben müßte.

Aus Symmetriegründen gilt die obige Argumentation für die Tripel $(0,\ a_2,\ 0)$, $(0,\ 0,\ a_3)$, $(0,\ a_5,\ -a_5)$ und $(a_1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ a_3)$, $(-a_6,\ 0,\ a_6)$ analog. Insbesondere sind also a_1 und a_4, a_2 und a_5 sowie a_3 und a_6 linear unabhängig.

Ist nur eines der drei Tripel $\{a_1, a_4, a_6\}$, $\{a_2, a_4, a_5\}$, $\{a_3, a_5, a_6\}$ linear unabhängig, so ist der (Zeilen-)Rang von M_1 gleich 6. Ist also $\operatorname{rang}(M_1) < 6$, so folgt daraus, daß $\{a_1, a_4, a_6\}$, $\{a_2, a_4, a_5\}$ und $\{a_3, a_5, a_6\}$ jeweils linear abhängig sein müssen.

Wir wählen eine Lösung v_1, v_2, v_3 des Systems (6.1), wobei die v_i linear unabhängig seien sollen (sonst spannen sie kein Gitter auf). Da $\operatorname{rang}(M_1) < 6$ ist, kann man nach obiger Feststellung $n_1 \in \operatorname{lin}(a_1, a_4, a_6)^\perp$, $n_2 \in \operatorname{lin}(a_2, a_4, a_5)^\perp$ und $n_3 \in \operatorname{lin}(a_3, a_5, a_6)^\perp$ so wählen, daß kein $n_i = 0$ ist. Dann ist mit $(v_1,\ v_2,\ v_3)$ auch $(v_1',\ v_2',\ v_3') = (v_1,\ v_2,\ v_3) + \lambda\,(n_1,\ 0,\ 0) + \mu\,(0,\ n_2,\ 0) + \nu\,(0,\ 0,\ n_3)$ eine Lösung von (6.1), für beliebige reelle λ, μ, ν.

Die Determinante des von obiger Lösung aufgespannten Gitters ist:

$$\begin{aligned}\det(v_1', v_2', v_3') = {} & \det(v_1, v_2, v_3) \\ & + \lambda \det(n_1, v_2, v_3) + \mu \det(v_1, n_2, v_3) + \nu \det(v_1, v_2, n_3) \\ & + \lambda\mu \det(n_1, n_2, v_3) + \mu\nu \det(v_1, n_2, n_3) + \lambda\nu \det(n_1, v_2, n_3) \\ & + \lambda\mu\nu \det(n_1, n_2, n_3)\end{aligned} \tag{6.1}$$

Wir werden daher zeigen, daß der Ausdruck (6.1) kein lokales Minimum (bezüglich der Variablen λ, μ, ν) besitzt; dann liefert wegen des Lemmas 6.1 für $\operatorname{rang}(M_1) < 6$ keine linear unabhängige (d.h. Gitter-) Lösung von (6.1) ein kritisches Gitter, was den Beweis des Lemmas beendet.

Ist $\det(n_1, v_2, v_3) \neq 0$ oder $\det(v_1, n_2, v_3) \neq 0$ oder $\det(v_1, v_2, n_3) \neq 0$, so ist der Ausdruck (6.1) bezüglich λ (oder μ oder ν) bei Festhalten der jeweils anderen beiden Variablen linear, besitzt also keine lokalen Minima.

Sind alle drei Determinanten Null, so liefert dies die linearen Abhängigkeiten

$$n_1 = \alpha_{1,2}v_2 + \alpha_{1,3}v_3, \quad n_2 = \alpha_{2,1}v_1 + \alpha_{2,3}v_3 \quad \text{und} \quad n_3 = \alpha_{3,1}v_1 + \alpha_{3,2}v_2.$$

Setzt man noch $\eta := \det(v_1, v_2, v_3)$, so kann man (6.1) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}\det(v_1', v_2', v_3') = {} & \eta \\ & + \lambda\mu(\alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1})\eta + \mu\nu(\alpha_{3,2} \cdot \alpha_{2,3})\eta + \lambda\nu(\alpha_{3,1} \cdot \alpha_{1,3})\eta \\ & + \lambda\mu\nu \det(n_1, n_2, n_3)\end{aligned}$$

Ist nun $(\alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1}) \neq 0$ oder $(\alpha_{3,2} \cdot \alpha_{2,3}) \neq 0$ oder $(\alpha_{3,1} \cdot \alpha_{1,3}) \neq 0$, liegt wieder ein linearer Ausdruck in λ, μ oder ν vor, der kein lokales Minimum hat.

Es bleibt also der Fall zu untersuchen, daß die 3 Produkte alle gleich 0 sind, also die 8 folgenden Kombinationen:

$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,2} = \alpha_{3,1} = 0$: Hier ist $n_3 = 0$, Widerspruch.

$\alpha_{1,2} = \alpha_{3,2} = \alpha_{1,3} = 0$: Hier ist $n_1 = 0$, Widerspruch.

$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,1} = 0$: Hier gilt $n_1 = \alpha_{1,3}v_3, \quad n_2 = \alpha_{2,1}v_1, \quad n_3 = \alpha_{3,2}v_2$. Da die n_i linear unabhängig sind, ist $\det(n_1, n_2, n_3) \neq 0$, also der Ausdruck (6.1) linear in allen 3 Variablen λ, μ, ν, und damit ohne lokale Minima.

$\alpha_{1,2} = \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = 0$: Hier ist $n_1 = 0$, Widerspruch.

$\alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} = \alpha_{3,1} = 0$: Hier ist $n_3 = 0$, Widerspruch.

$\alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} = \alpha_{1,3} = 0$: Hier gilt $n_1 = \alpha_{1,2}v_2, \quad n_2 = \alpha_{2,3}v_3, \quad n_3 = \alpha_{3,1}v_1$. Wie oben ist in diesem Fall (6.1) ohne lokale Minima, da linear.

$\alpha_{2,1} = \alpha_{2,3} = \alpha_{3,1} = 0$: Hier ist $n_2 = 0$, Widerspruch.

$\alpha_{2,1} = \alpha_{2,3} = \alpha_{1,3} = 0$: Hier ist $n_2 = 0$, Widerspruch.

□

Auf der Suche nach einem kritischen Gitter vom Typ 1 für K können wir uns also auf solche Fälle beschränken, in denen M_1 den Rang 6 hat. In diesem Fall ist das Gleichungssystem (6.1) aber unterbestimmt vom Grade 3, das heißt, wir können P_I explizit mit Hilfe der Lösungen des Systems (6.1) als Polynom in 3 Variablen darstellen: Jede Lösung von (6.1) läßt sich als

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \lambda_s \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \lambda_t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \lambda_u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

mit $\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u \in \mathbb{R}$ schreiben, wobei $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ eine spezielle Lösung des Systems und s, t, u eine Basis für den durch $M_1 w = 0$ bestimmten Unterraum sind. Dabei sind die $l_i = \begin{pmatrix} l_{i\,1} \\ l_{i\,2} \\ l_{i\,3} \end{pmatrix}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$, die w_i, s_i, t_i und u_i ebenfalls. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich die Determinante des Gitters als Polynom in den $\lambda_{s,t,u}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} P_I(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u) = \det(l_1 l_2 l_3) &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_3} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{3} \left(w_{i\,\pi(i)} + \lambda_s s_{i\,\pi(i)} + \lambda_t t_{i\,\pi(i)} + \lambda_u u_{i\,\pi(i)} \right) \\ &= c_{3,0,0}\lambda_s^3 + c_{0,3,0}\lambda_t^3 + c_{0,0,3}\lambda_u^3 + \\ &\quad + c_{2,1,0}\lambda_s^2\lambda_t + c_{2,0,1}\lambda_s^2\lambda_u + c_{0,2,1}\lambda_t^2\lambda_u + \\ &\quad + c_{0,1,2}\lambda_t\lambda_u^2 + c_{1,0,2}\lambda_s\lambda_u^2 + c_{1,2,0}\lambda_s\lambda_t^2 + \\ &\quad + c_{1,1,1}\lambda_s\lambda_t\lambda_u + c_{2,0,0}\lambda_s^2 + c_{0,2,0}\lambda_t^2 + c_{0,0,2}\lambda_u^2 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+c_{1,1,0}\lambda_s\lambda_t + c_{1,0,1}\lambda_s\lambda_u + c_{0,1,1}\lambda_t\lambda_u + \\
&+c_{1,0,0}\lambda_s + c_{0,1,0}\lambda_t + c_{0,0,1}\lambda_u + c_{0,0,0} \\
= &\sum_{\substack{i,j,k\in\{0,1,2,3\}\\ i+j+k\leq 3}} c_{i,j,k}\lambda_s^i\lambda_t^j\lambda_u^k
\end{aligned}
$$

P_I ist also ein Polynom in 3 Variablen mit Totalgrad 3 und geeignet entsprechend der obigen Formel zu bestimmenden reellen Koeffizienten $c_{i,j,k}$.

Nach Lemma 6.1 gibt jedes kritische Gitter vom Typ 1 für K zu einem lokalen Minimum von $|P_I|$ Anlaß.

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

Satz 6.1. *Ist $\Lambda(v_1, v_2, v_3)$ ein kritisches Gitter vom Typ 1 für den konvexen Körper* K*, so gibt es ein Parametertripel $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ für ein lokales Minimum von $|P_I|$, mit dem sich die Basisvektoren des Gitters als $v_i = w_i + \lambda_s s_i + \lambda_t t_i + \lambda_u u_i$ schreiben lassen, wobei w, s, t, u wie in (6.2) definiert sind.*

Als Ergebnis dieses Abschnitts läßt sich außerdem der schwächere aber anschaulichere folgende Satz formulieren:

Satz 6.2. *Ist Λ ein kritisches Gitter vom Typ 1 für den konvexen Körper* K*, so gibt es eine Auswahl von* 6 *nicht notwendig verschiedenen Facettenungleichungen für* K*, und eine Basis für Λ, so daß das Polynom P_I für diese Basis ein lokales Extremum besitzt.*

6.2 Gitter vom Typ 2a

Im letzten Abschnitt bezogen wir uns auf den ersten Teil des Satzes 5.6, der nicht nur eine Aussage darüber traf, daß eine gewisse Menge von Punkten auf dem Rand von K liegt, sondern auch darüber, daß die angegebenen Punkte die einzigen im Rand sind. In den verbleibenden beiden Fällen ist dies nicht notwendig der Fall, das heißt, es können durchaus außer den den jeweiligen Typ von Gitter charakterisierenden Punkten weitere sich im Rand befinden. Offenbar kann in so einem Fall nicht genauso wie im letzten Abschnitt argumentiert werden, denn löst man eine Relaxierung wie (6.1), so bleiben zwar wieder die 6 (oder im nächsten Abschnitt 7) Punkte und ihre Gegenpunkte auf Stützebenen an K, aber für solche Punkte, die auf dem Rand von K, jedoch nicht automatisch in einer Facettenhyperebene der Relaxierung liegen, kann man dies nicht schlußfolgern. Eine derartige Lösung muß also nicht einmal ein zulässiges Gitter für K liefern.

Es seien wieder v_1, v_2, v_3 die Basisvektoren des Gitters. Ein Gitter des Typs 2a ist dann charakterisiert durch die folgenden Bedingungen: v_1, v_2, v_3 und $(v_1 + v_2), (v_2 + v_3), (v_1 + v_3)$ sowie ihre Gegenpunkte sind Gitterpunkte auf K, und der Punkt $(v_1 + v_2 + v_3)$ liegt außerhalb von K.

Zunächst betrachten wir die Möglichkeit, daß die oben genannten Punkte die einzigen Gitterpunkte auf K sind. In diesem Fall kann man im wesentlichen genauso vorgehen wie im letzten Abschnitt: Für jeden dieser 6 Punkte existiert eine Zeile in A, so daß Gleichheit gilt. Bezeichnet man diese Zeilen aus A mit $a_1, \ldots, a_6$, so ist das Gleichungssystem

$$
\begin{array}{rcrcrl}
a_1{}^\mathsf{T} v_1 & & & & & = 1 \\
& & a_2{}^\mathsf{T} v_2 & & & = 1 \\
& & & & a_3{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\
a_4{}^\mathsf{T} v_1 & + & a_4{}^\mathsf{T} v_2 & & & = 1 \\
& & a_5{}^\mathsf{T} v_2 & + & a_5{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\
a_6{}^\mathsf{T} v_1 & & & + & a_6{}^\mathsf{T} v_3 & = 1
\end{array}
\tag{6.3}
$$

erfüllt, dessen Matrix wir mit M_2 bezeichen wollen.

Auch das folgende Lemma entspricht dem aus dem letzten Abschnitt:

Lemma 6.3. *Hat die Matrix M_2 nicht den Rang 6, so ist das von v_1, v_2, v_3 aufgespannte Gitter nicht kritisch für* K.

Beweis. Der Beweis stimmt mit dem für Lemma 6.2 überein, denn die Vorzeichenveränderungen in M_2 gegenüber M_1 haben keine Auswirkung auf den ersten Absatz des Beweises, und im weiteren wurden ein Wissen über die Vorzeichen in den Zeilen 4–6 von M_1 im Beweis nicht benutzt. □

Nun stellt sich die Frage, was passiert, wenn weitere Gitterpunkte auf dem Rand von K liegen. Zunächst einmal kommen nur wenige Gitterpunkte dafür in Frage. Um zwei weitgehend ähnliche Beweise zu vermeiden, untersuchen wir die Frage gleich für Gitter vom Typ 2a und 2b. Das Resultat findet sich schon bei Minkowski [20] Abschnitt 32 und 33:

Satz 6.3. *Ist Λ ein Gitter vom Typ 2a mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$, so liegen auf dem Rand von* K *außer den charakteristischen Gitterpunkten aus Satz 5.6 höchstens noch die Gitterpunkte*

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B
$$

sowie die durch Permutation der Komponenten daraus entstehenden Punkte und die entsprechenden Gegenpunkte.

Ist Λ ein Gitter vom Typ 2b, mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$, so liegen außer den charakteristischen Gitterpunkten aus Satz 5.6 und den für Gitter vom Typ 2a in Frage kommenden höchstens noch die Gitterpunkte

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B
$$

sowie die durch Permutationen der Komponenten daraus entstehenden Punkte und die Gegenpunkte auf dem Rand von K.

Beweis. Zunächst kann man wieder durch Identifikation von K mit B^{-1}K und Λ mit $B^{-1}\Lambda$ annehmen, daß $b_i = e_i$ für $i = 1, 2, 3$ gilt. Dann verwenden wir erneut den Satz 4.4, um die Menge der in Frage kommenden Punkte zu verkleinern: Es können höchstens solche Gitterpunkte auf K liegen, die in der Menge M aus (4.3) enthalten sind, sowie die entsprechenden Punkte in allen anderen 8 Orthanten. Desweiteren müssen noch die Punkte der Art (0, 1, 1) und (1, 1, 1) in Erwägung gezogen werden.

Im Folgenden wird daher jede Punkteklasse auf ihre Lagemöglichkeiten bezüglich K untersucht. Dabei werden alle Argumente so formuliert, daß sie von Permutationen der Komponenten unabhängig sind, so daß es keine Einschränkung darstellt, nur den die Punkteklasse repräsentierenden Punkt zu betrachten.

Klasse (0, 1, 1) Der Punkt (0, 1, 1) und sein Gegenpunkt[2] tritt bereits nach Voraussetzung auf K auf. Der Punkt (0, 1, −1) kann nicht ausgeschlossen werden.

Klasse (1, 1, 1) Der Punkt (1, 1, 1) selbst ist durch die jeweilige Bedingung aus Satz 5.6 bereits behandelt. Der Punkt (−1, 1, 1) kann auf K vorkommen. Alle weiteren Punkte dieser Klasse entstehen durch Permutation oder Spiegelung am Nullpunkt aus einem der beiden.

Klasse (0, 1, 2) Der Punkt (0, 1, 2) kann auf K liegen. Der Punkt (0, −1, 2) kann, weil

$$F(0,-1,2) + \underbrace{F(0,1,1)}_{=1} \geq F(0,0,3) = 3$$

zu $F(0,-1,2) \geq 2$ führt, ausgeschlossen werden.

Klasse (1, 1, 2) Der Punkt (−1, −1, 2) kann wegen

$$F(-1,-1,2) + F(1,0,1) + F(0,1,1) \geq F(0,0,4) = 4$$

ausgeschlossen werden.
Der Punkt (−1, 1, 2) kann vorkommen.
Der Punkt (1, 1, 2) kann nur für Gitter vom Typ 2a ausgeschlossen werden, weil

$$F(1,1,2) + F(1,1,0) \geq F(2,2,2) = 2F(1,1,1)$$

ist, also $F(1,1,2) > 1$, falls (1, 1, 1) außerhalb von K liegt.

Klasse (1, 2, 2) Der Punkt (1, 2, 2) kann nur für Gitter vom Typ 2a ausgeschlossen werden, und zwar wegen

$$F(1,2,2) + F(1,0,0) \geq 2F(1,1,1).$$

Die beiden anderen Punkte (−1, 2, 2) und (−1, −2, 2) können nicht auf K liegen, denn

$$\begin{aligned} F(-1,2,2) + \tfrac{1}{2}F(1,1,0) + \tfrac{1}{2}F(1,0,1) &\geq F(0,\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}, \\ F(-1,-2,2) + F(1,0,1) + 2F(0,1,1) &\geq F(0,0,5) \ = \ 5. \end{aligned}$$

[2] Ab jetzt unterbleibt der Hinweis auf den Gegenpunkt.

Klasse (1, 1, 3) Kein Punkt dieses Typs kann auf K liegen:

$$\begin{aligned} F(1,1,3)+F(-1,-1,0) &\geq F(0,0,3)=3,\\ F(-1,1,3)+F(1,0,1)+F(0,-1,0) &\geq F(0,0,4)=4,\\ F(-1,-1,3)+F(1,1,0) &\geq F(0,0,3)=3. \end{aligned}$$

Klasse (1, 2, 3) Der Punkt (1, 2, 3) kann nur für Gitter vom Typ 2a ausgeschlossen werden, die anderen für beide Typen von Gittern:

$$\begin{aligned} F(1,2,3)+F(1,1,0)+F(1,0,0) &\geq F(3,3,3)=3F(1,1,1),\\ F(-1,2,3)+F(1,1,0) &\geq F(0,3,3)=3,\\ F(-1,-2,3)+F(1,0,1)+2F(0,1,1) &\geq F(0,0,6)=6,\\ F(1,-2,3)+F(-1,0,0)+2F(0,1,1) &\geq F(0,0,5)=5. \end{aligned}$$

Klasse (2, 2, 3) Kein Punkt dieses Typs kann auf K liegen:

$$\begin{aligned} F(2,2,3)+F(1,1,0) &\geq F(3,3,3)\geq 3,\\ F(-2,2,3)+2F(-1,-1,0)+3F(-1,0,-1) &\geq F(-7,0,0)=7,\\ F(-2,-2,3)+2F(1,0,1)+2F(0,1,1) &\geq F(0,0,7)=7. \end{aligned}$$

Klasse (1, 2, 4) Auch diese Klasse von Punkten liefert keine Punkte, die potentiell auf K liegen könnten:

$$\begin{aligned} F(1,2,4)+F(-1,-1,0)+F(0,-1,0) &\geq F(0,0,4)=4,\\ F(-1,2,4)+F(1,0,1)+2F(0,-1,0) &\geq F(0,0,5)=5,\\ F(1,-2,4)+2F(0,1,1)+F(-1,0,-1) &\geq F(0,0,5)=5,\\ F(-1,-2,4)+F(1,1,0)+F(0,1,1) &\geq F(0,0,5)=5. \end{aligned}$$

Klasse (2, 3, 4) Wie nicht anders zu erwarten, kann auch von den Punkten dieser Klasse keiner auf K liegen:

$$\begin{aligned} F(2,3,4)+F(1,0,0)+F(1,1,0) &\geq F(4,4,4)\geq 4,\\ F(-2,3,4)+2F(1,1,0)+F(0,0,1) &\geq F(0,5,5)=5,\\ F(2,-3,4)+F(-1,0,-1)+F(-1,-1,0)+3F(0,-1,-1) &\geq F(0,-7,0)=7,\\ F(2,3,-4)+2F(-1,-1,0)+F(0,-1,-1) &\geq F(0,0,-5)=5. \end{aligned}$$

Die obige Fallunterscheidung schließt also alle Punkte außer (0, 1, −1), (−1, 1, 1), (0, 1, 2) und (−1, 1, 2), den aus diesen durch Permutation der Komponenten sowie für Typ-2b-Gitter zusätzlich (1, 2, 2), (1, 2, 2) und (1, 2, 3) und deren durch Komponentenpermutation verwandte aus. Das beendet den Beweis des Satzes. □

Vereinbarung 6.1: Im Folgenden wird stillschweigend darauf verzichtet, zu jedem Punkt seinen Gegenpunkt zu betrachten oder zu erwähnen; dies ist keine Einschränkung.
Punkte, die bis auf Permutation der Komponenten und anschließende Bildung des Gegenpunktes übereinstimmen, werden zu einer Klasse zusammengefaßt, und es wird ein Punkt einer solchen Klasse (wenn möglich üblicherweise der im $(+,+,+)$-Orthanten gelegene) als Repräsentant gewählt. Dabei wird von *Punkten der Art* (a, b, c) oder *Punkten des Typs* (a, b, c) gesprochen.
Die Formulierung „der Punkt p liegt auf K“ soll bedeuten $p \in \partial \mathrm{K}$, d.h. der Punkt liegt im Rand des konvexen Körpers.

Mit dem letzten Satz hat sich unser Problem jedoch noch nicht verändert, wenngleich sich auch die Anzahl der überhaupt zu erwägenden Punkte deutlich verringert hat. Um eine analoge Aussage zum Satz 6.1 für diesen Abschnitt formulieren zu können, dürfen wir aber noch gewisse zusätzliche Forderungen an die Wahl der Facetten von K im Gleichungssystem (6.3) stellen. Das wollen wir nun tun, und zwar so, daß die zusätzlichen Forderungen garantieren, daß jede Lösung von (6.3) unter diesen zusätzlichen Bedingungen auch die weiteren Gitterpunkte aus dem Inneren des Körpers K fernhält. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn die nach Satz 6.3 in Frage kommenden Punkte in den Facettenhyperebenen zu liegen kommen, es also eine Facettenungleichung von K gibt, die der jeweilige Punkt mit Gleichheit erfüllt. Dabei hilft das

Lemma 6.4. *Für jede Lösung* (v_1, v_2, v_3) *von (6.3) gelten*

$$\begin{array}{rcl} -1 \leq & a_1{}^\mathsf{T} v_2,\ a_1{}^\mathsf{T} v_3,\ a_1{}^\mathsf{T}(v_2+v_3) & \leq 0; \\ -1 \leq & a_2{}^\mathsf{T} v_1,\ a_2{}^\mathsf{T} v_3,\ a_1{}^\mathsf{T}(v_1+v_3) & \leq 0; \\ -1 \leq & a_3{}^\mathsf{T} v_1,\ a_3{}^\mathsf{T} v_2,\ a_1{}^\mathsf{T}(v_1+v_2) & \leq 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 0 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_1, a_4{}^\mathsf{T} v_2 \leq 1 & \textit{und} & -1 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_3 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_1, a_4{}^\mathsf{T} v_2 \leq 1; \\ 0 \leq a_5{}^\mathsf{T} v_2, a_5{}^\mathsf{T} v_3 \leq 1 & \textit{und} & -1 \leq a_5{}^\mathsf{T} v_1 \leq a_5{}^\mathsf{T} v_2, a_5{}^\mathsf{T} v_3 \leq 1; \\ 0 \leq a_6{}^\mathsf{T} v_1, a_6{}^\mathsf{T} v_3 \leq 1 & \textit{und} & -1 \leq a_6{}^\mathsf{T} v_2 \leq a_6{}^\mathsf{T} v_1, a_6{}^\mathsf{T} v_3 \leq 1. \end{array}$$

Beweis. Da für alle $x \in \mathrm{K}$ die Doppelungleichung $-1 \leq a_1{}^\mathsf{T} x \leq 1$ gilt, setzen wir der Reihe nach für x die Werte $v_1, v_2, v_3, v_1+v_2, v_2+v_3, v_1+v_3$ ein und erhalten:

$$-1 \leq \quad 1,\ a_1{}^\mathsf{T} v_2,\ a_1{}^\mathsf{T} v_3,\ 1 + a_1{}^\mathsf{T} v_2,\ a_1{}^\mathsf{T}(v_2+v_3),\ 1 + a_1{}^\mathsf{T} v_3 \quad \leq 1.$$

Daraus folgt sofort die erste Behauptung; für a_2 und a_3 erhält man die nächsten beiden Behauptungen.

Die Bedingungen in der vierten Zeile erhält man wie folgt: Es gilt $-1 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_1 \leq 1$, und weil $a_4{}^\mathsf{T} v_1 = 1 - a_4{}^\mathsf{T} v_2$ ist, folgt $-2 \leq -a_4{}^\mathsf{T} v_2 \leq 0$. Natürlich ist auch $-1 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_2 \leq 1$, also erhält man daraus $0 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_2 \leq 1$. Die Bedingung $0 \leq a_4{}^\mathsf{T} v_1 \leq 1$ folgt auf dieselbe Art und

Weise. Aus den Voraussetzungen $-1 \leq a_4{}^\intercal v_1 + a_4{}^\intercal v_3 \leq 1 = a_4{}^\intercal v_1 + a_4{}^\intercal v_2$ und $a_4{}^\intercal v_2 \leq 1$ folgt $-1 \leq a_4{}^\intercal v_3 \leq a_4{}^\intercal v_2 \leq 1$, und analog erhält man die letzte Doppelungleichung in der vierten Zeile; die Behauptungen in den Zeilen 5 und 6 erhält man genauso. □

Satz 6.4. *Ist $\Lambda(v_1, v_2, v_3)$ ein kritisches Gitter mit Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ vom Typ 2a für den Körper* K*, so gibt es eine Auswahl von* 6 *Facettenungleichungen von* K*, so daß alle auf* K *liegenden Gitterpunkte in diesen* 6 *Facettenhyperebenen liegen.*

Dieser Satz ist die Darstellung eines Satzes von Minkowski [20] Abschnitt 32 unter den hier gegebenen Voraussetzungen und Bezeichnungen.

Beweis. Zunächst darf vermöge Transformation B^{-1} wieder $b_i = e_i$ angenommen werden.

Es genügt, für jede Kombination von zusätzlich zu den aus Satz 5.6 auf K liegenden Gitterpunkten anzugeben, wie die Facetten $a_1, \ldots, a_6$ gewählt werden müssen. Das erfordert erneut eine aufwendige Fallunterscheidung; einige der hier ausgeschlossenen Fälle hat Minkowski in [20] nicht erwähnt, und einige hat er dort behandelt, obwohl sie gar nicht vorkommen können, wie zum Teil schon bei Hancock [13] Abschnitt 182 bemerkt wird.

Wir unterscheiden 4 Fälle, je nachdem welche Punkte aus Satz 6.3 sich auf K befinden.

Fall 1: Ein Punkt des Typs $(-1,\ 1,\ 2)$ liegt auf K.

Es stellt keine Einschränkung dar, wenn angenommen wird, daß der auf K liegende Punkt p gerade der Punkt $(-1,\ 1,\ 2)$ sei, denn sonst permutieren wir die Gitterbasis so, daß p in $(-1,\ 1,\ 2)$ übergeht.

Wenn $(-1,\ 1,\ 2)$ auf K liegt, so findet man wegen $-1 \leq a_1{}^\intercal(-v_1 + v_2 + 2v_3) \leq 1$, daß $0 \leq a_1{}^\intercal v_2 + 2v_3$ sein muß, und wegen Lemma 6.4 ist also $a_1{}^\intercal v_2 = a_1{}^\intercal v_2 = 0$.

Wählt man nun $a_4 = a_1$ und $a_6 = a_1$ im Gleichungssystem (6.3), so erzwingt dies

$$\begin{array}{lclcl} a_1{}^\intercal v_1 + a_1{}^\intercal v_2 = 1 & \wedge & a_1{}^\intercal v_1 = 1 & \Longrightarrow & a_1{}^\intercal v_2 = 0 \\ a_1{}^\intercal v_1 + a_1{}^\intercal v_3 = 1 & \wedge & a_1{}^\intercal v_1 = 1 & \Longrightarrow & a_1{}^\intercal v_3 = 0 \end{array}$$

für *jede* Lösung (v_1, v_2, v_3) von (6.3). Daher liegt der Punkt $(-1,\ 1,\ 2)$ in der Stützebene $H(a_1, -1)$ an K, denn $-a_1{}^\intercal v_1 + a_1{}^\intercal v_2 + 2a_1{}^\intercal v_3 = -1$. Somit bleiben dieser Punkt und sein Gegenpunkt für jedes von einer Lösung des Systems (6.3) aufgespannte Gitter außerhalb des Inneren von K.

Auch die folgenden Punkte und ihre Gegenpunkte liegen nun in einer der beiden Stützebenen $H(a_1, 1)$ oder $H(a_1, -1)$ an K: $(1,\ -1,\ 2)$, $(-1,\ 2,\ 1)$, $(1,\ 2,\ -1)$, $(-1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ -1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ -1)$, $(1,\ 0,\ -1)$, $(1,\ -1,\ 0)$ sowie $(1,\ 0,\ 2)$ und $(1,\ 2,\ 0)$.

Es bleiben jedoch noch einige Punkte zu untersuchen, was nun geschehen soll. Die folgenden können überhaupt nicht gleichzeitig mit $(-1,\ 1,\ 2)$ auf K liegen, und zwar wegen

$$F(2,-1,1) + F(1,-1,-2) + 2F(1,1,0) + F(1,0,1) \geq F(6,0,0) = 6$$

der Punkt $(2,\ -1,\ 1)$, wegen

$$F(2,1,-1) + F(1,-1,-2) + 3F(1,0,1) \geq F(6,0,0) = 6$$

der Punkt (2, 1, −1), wegen

$$F(0,1,-1)+F(1,-1,-2)+F(-1,0,-1)\geq F(0,0,-4)=4$$

der Punkt (0, 1, −1), wegen

$$F(0,2,1)+F(-1,1,2)+\tfrac{1}{2}F(1,0,1)+\tfrac{1}{2}F(1,1,0)\geq F\big(0,\tfrac{7}{2},\tfrac{7}{2}\big)=\tfrac{7}{2}$$

der Punkt (0, 2, 1), wegen

$$F(2,0,1)+F(1,-1,-2)+F(1,1,0)+F(1,0,1)\geq F(5,0,0)=5$$

der Punkt (2, 0, 1), und schließlich wegen

$$F(2,1,0)+F(1,-1,-2)+2F(1,0,1)\geq F(5,0,0)=5$$

der Punkt (2, 1, 0).

Der einzige verbliebene und noch zu betrachtende Punkt ist $q = (0,\ 1,\ 2)$. Sollte er auf K liegen, so findet man wegen $-1 \leq {a_5}^\intercal(v_2+2v_3) \leq 1$ und Lemma 6.4, daß ${a_5}^\intercal v_3 = 0$ ist. Daher wählen wir $a_5 = a_2$ in (6.3), was zu ${a_2}^\intercal v_3 = 0$ und damit $q \in H(a_2, 1)$ für jede Lösung von (6.3) führt.

Damit kann also für jede Auswahl von zusätzlichen Punkten die den Punkt p enthält durch geeignete Wahl von a_4 und a_6 sowie eventuell a_5 das Gleichungssystem (6.3) so gewählt werden, daß kein weiterer Gitterpunkt ins Innere von K fällt.

Fall 2: Kein Punkt vom Typ (−1, 1, 2) liegt auf K, aber ein Punkt p vom Typ (−1, 1, 1) liegt auf K.
Es ist wieder keine Einschränkung anzunehmen, daß der Punkt $p = (-1,\ 1,\ 1)$ auf K liegt. Wie schon im letzten Fall finden wir ${a_1}^\intercal v_2 = {a_1}^\intercal v_3 = 0$. Nun wählen wir $a_4 = a_1$ und $a_6 = a_1$, so daß ${a_1}^\intercal v_2 = {a_1}^\intercal v_3 = 0$ folgt, und damit $p \in H(a_1, -1)$ erfüllt ist. Dann liegen auch die folgenden Punkte und ihre Gegenpunkte in einer der Stützebenen $H(a_1, 1)$ oder $H(a_1, -1)$ und damit nicht im Inneren von K: (1, −1, 1), (1, 1, −1), (1, 0, −1), (1, −1, 0), (1, 0, 2), (1, 2, 0).

Die Punkte (2, 0, 1) und (2, 1, 0) können nicht zusammen mit p auf K liegen, denn

$$F(2,0,1)+F(1,-1,-1)+F(1,1,0)\geq F(4,0,0)=4$$

und

$$F(2,1,0)+F(1,-1,-1)+F(1,0,1)\geq F(4,0,0)=4.$$

Von den beiden Punkten (0, 1, 2) und (0, 2, 1) kann höchstens einer auf K liegen, denn nimmt man an, daß beide auf K lägen, so erhielte man mit

$$2 = F(0,1,2) + F(0,2,1) \geq F(0,3,3) = 3$$

den Widerspruch $2 \geq 3$.

Liegt nun (0, 1, 2) auf K, so gilt $a_5{}^\intercal v_3 = 0$, und wir erzwingen mit der Wahl $a_5 = a_2$, daß der Punkt in der Stützebene $H(a_2, 1)$ liegt; liegt (0, 2, 1) auf K, so finden wir $a_5{}^\intercal v_2 = 0$ und wählen $a_5 = a_3$, um zu erreichen, daß der Punkt in der Stützebene $H(a_3, 1)$ an K liegt.

Der letzte noch zu erwägende Punkt (0, 1, −1) hat, falls er auf K liegt, die Bedingung $a_3{}^\intercal v_2$ zur Folge; daher wird $a_5 = a_3$ gewählt, wodurch der Punkt in $H(a_3, -1)$ zu liegen kommt; er kann nicht gleichzeitig mit (0, 2, 1) oder (0, 1, 2) auftreten, denn

$$F(0,1,-1) + F(0,2,1) \geq F(0,3,0) = 3,$$
$$F(0,-1,1) + F(0,1,2) \geq F(0,0,3) = 3.$$

Fall 3: Ein Punkt des Typs (0, 1, 2) liegt auf K, und es findet sich kein Punkt des Typs (−1, 1, 2), und kein Punkt des Typs (−1, 1, 1) auf K.
Ohne Einschränkung liege der Punkt $p = (0, 1, 2)$ auf K. Wie bereits oben festgestellt gilt dann $a_5{}^\intercal v_3 = 0$, so daß wir $a_5 = a_2$ wählen, damit $a_2{}^\intercal v_3 = 0$ folgt. Dann liegt p in der Stützebene $H(a_2, 1)$ an K, und auch die Punkte (0, 1, −1) und (−1, 1, 0) liegen in dieser Stützebene.

Die folgenden Punkte können nicht auf K vorkommen: (0, 2, 1), (1, 2, 0) und (1, 0, 2), denn

$$F(0,2,1) + F(0,1,2) \geq F(0,3,3) = 3,$$
$$F(1,2,0) + 2F(0,-1,-2) + F(-1,0,-1) \geq F(0,0,-5) = 5$$

und

$$F(1,0,2) + F(0,1,2) + F(-1,-1,0) \geq F(0,0,4) = 4.$$

Die beiden Punkte (2, 1, 0) und (2, 0, 1) können nicht gleichzeitig auf K liegen, denn wegen

$$F(2,1,0) + F(2,0,1) + F(0,-1,-1) \geq F(4,0,0) = 4$$

erhält man, falls man annimmt, daß beide auf K lägen, den Widerspruch $3 \geq 4$.

Falls wir (2, 1, 0) auf K finden, so gilt wieder wegen Lemma 6.4 die Gleichung $a_4{}^\intercal v_1 = 0$. Daher wählen wir $a_4 = a_2$, so daß wegen $a_2{}^\intercal v_1 = 0$ der Punkt in der Stützebene $H(a_4, 1)$ liegt. Falls wir (2, 0, 1) auf K finden, so ist, weil $a_6{}^\intercal v_1 = 0$ ist, die Wahl von $a_6 = a_3$ möglich, und es gilt dann die Gleichung $a_3{}^\intercal v_1 = 0$. Daher liegt der Punkt in der Stützebene $H(a_3, 1)$.

Es bleibt nur noch der Punkt (1, 0, −1) zu betrachten. Dieser kann nicht gleichzeitig mit (2, 0, 1) auf K auftreten, denn

$$F(2,0,1) + F(1,0,-1) \geq F(3,0,0) = 3.$$

Da $a_1{}^\intercal v_3 = 0$ gilt, können wir $a_6 = a_1$ mit der Folgerung $a_1{}^\intercal v_3 = 0$ wählen, um den Punkt in $H(a_1, 1)$ zu finden, ohne mit der Wahl für einen anderen Punkt oben in Konflikt zu geraten.

Fall 4: Nur Punkte des Typs (0, 1, −1) liegen zusätzlich auf K.
Wir nehmen wieder an, der Punkt $p = (0,\ 1,\ -1)$ liegt auf K. Dann gilt $a_2{}^\intercal v_3 = 0$, und wir können $a_5 = a_2$ wählen, mit der Konsequenz $a_2{}^\intercal v_3 = 0$, und daher $p \in H(a_2, 1)$. Für den Punkt $(-1,\ 1,\ 0)$ wählen wir zusätzlich $a_4 = a_1$, weil $a_1{}^\intercal v_2$ ist, so daß er wegen $a_1{}^\intercal v_2 = 0$ in der Stützebene $H(a_1, -1)$ liegt.

Findet sich auch der Punkt $(1,\ 0,\ -1)$ auf K, so ist außerdem $a_3{}^\intercal v_1 = 0$, und wir wählen daher $a_6 = a_3$, so daß $a_3{}^\intercal v_1 = 0$ folgt, wodurch der Punkt in der Stützebene $H(a_3, -1)$ zu liegen kommt.

Damit ist der Satz bewiesen. □

Man kann also auch im Fall von Gittern des Typs 2a immer ein kritisches Gitter finden wenn alle Fälle betrachtet, in denen M_2 den Rang 6 hat. In jedem solchen Fall können wir auch wieder die Lösungen von (6.3) als

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \lambda_s \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \lambda_t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \lambda_u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

mit $\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u \in \mathbb{R}$ schreiben, wobei $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ die spezielle Lösung des Gleichungssystems (6.3) und s, t, u eine Basis für den durch $M_2 w = 0$ bestimmten Unterraum sind. Daher kann wieder die Determinante der von den Lösungen l_1, l_2, l_3 aufgespannten zulässigen Gitter als Polynom mit Totalgrad 3 in den drei Variablen $\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u$ geschrieben werden,

$$P_{II}(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u) := \det(l_1, l_2, l_3) = \sum_{\substack{i,j,k \in \{0,1,2,3\} \\ i+j+k \leq 3}} c'_{i,j,k} \lambda_s^i \lambda_t^j \lambda_u^k$$

und wie für P_I stellt man fest, daß ein kritisches Gitter für K ein lokales Minimum von $|P_{II}|$ liefert, wenn nur die Facettenungleichungsauswahl geeignet getroffen war.

6.3 Gitter vom Typ 2b

Wie schon in den letzten beiden Abschnitten seien wieder v_1, v_2, v_3 die Basisvektoren des Gitters. Ein Gitter des Typs 2b ist dann dadurch charakterisiert, daß v_1, v_2, v_3 und $(v_1 + v_2), (v_2 + v_3), (v_1 + v_3), (v_1 + v_2 + v_3)$ sowie ihre Gegenpunkte Gitterpunkte auf K sind.

Zunächst betrachten wir die Möglichkeit, daß die oben genannten Punkte wieder die einzigen Gitterpunkte auf K sind. In diesem Fall kann man erneut so vorgehen wie im Fall von Gittern des Typs 1: Für jeden dieser Punkte existiert eine Zeile in A, so daß Gleichheit gilt. Bezeichnet man diese Zeilen aus A mit $a_1, \ldots, a_7$, so ist das Gleichungssystem

$$
\begin{array}{lllllll}
a_1{}^\mathsf{T} v_1 & & & & & = 1 \\
& & a_2{}^\mathsf{T} v_2 & & & = 1 \\
& & & & a_3{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\
a_4{}^\mathsf{T} v_1 & + & a_4{}^\mathsf{T} v_2 & & & = 1 \\
& & a_5{}^\mathsf{T} v_2 & + & a_5{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\
a_6{}^\mathsf{T} v_1 & & & + & a_6{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\
a_7{}^\mathsf{T} v_1 & + & a_7{}^\mathsf{T} v_2 & + & a_7{}^\mathsf{T} v_3 & = 1
\end{array}
\tag{6.5}
$$

erfüllt, dessen Matrix mit M_3 bezeichnet werden soll.

Auch in diesem Fall ist der Rang der Matrix M_3 mindestens 6 für ein kritisches Gitter:

Lemma 6.5. *Hat die Matrix M_3 nicht mindestens den Rang 6, so ist das von v_1, v_2, v_3 aufgespannte Gitter nicht kritisch für* K.

Beweis. Angenommen der Rang von M_3 ist nicht 7. Dann existiert eine nichttriviale Linearkombination der Zeilen von M_3:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} a_4 \\ a_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ a_5 \\ a_5 \end{pmatrix} + \lambda_6 \begin{pmatrix} a_6 \\ 0 \\ a_6 \end{pmatrix} + \lambda_7 \begin{pmatrix} a_7 \\ a_7 \\ a_7 \end{pmatrix} = 0.$$

Zunächst zeigen wir, daß es keine Einschränkung darstellt anzunehmen, daß $\lambda_7 \neq 0$ ist. Anderenfalls wissen wir, daß mindestens einer der Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ nicht verschwindet, denn wäre $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_7 = 0$, so wären alle Koeffizienten gleich 0. Dann kann durch Anwendung einer unimodularen Transformation auf die Basis eine Zeile, deren Koeffizient nicht 0 ist, mit der letzten von M_3 vertauscht werden.

Das heißt aber nichts anderes, als daß die letzte Zeile von M_3 als Linearkombination der übrigen geschrieben werden kann, also die Lage von $v_1 + v_2 + v_3$ auf einer Stützebene an K implizit bereits durch die ersten 6 Zeilen von M_3 gefordert wird. Daher sieht man durch Wiederholung des Beweises von Lemma 6.3 mit der von den ersten 6 Zeilen von M_3 gebildeten Matrix sofort, daß, wenn diese nicht mindestens Rang 6 hat, das von v_1, v_2, v_3 gebildete Gitter nicht kritisch sein kann. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Sind nun die oben genannten 14 Gitterpunkte die einzigen Gitterpunkte auf K, so können wir wieder argumentieren wie zuvor: Ist das Gitter Λ vom Typ 2b und kritisch für K, so hat die Matrix M_3 mindestens den Rang 6, ist also unterbestimmt vom Grad 2 oder 3, so daß die Lösungen des Gleichungssystems (6.5) sich als

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \lambda_s \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \lambda_t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \lambda_u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

mit $\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u \in \mathbb{R}$ schreiben lassen, wobei $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ eine spezielle Lösung des Systems (6.5) und s, t oder s, t, u eine Basis für den durch $M_3 w = 0$ bestimmten Unterraum sind, je nachdem, ob die Dimension des Unterraums 2 oder 3 ist. Sollte die Dimension 2 sein, so kann immer $u = 0$ gewählt werden.

Man kann wieder die Determinante des Gitters als Polynom ausdrücken, im allgemeinen mit drei Parametern λ_s, λ_t und λ_u:

$$P_{III}(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u) := \det(l_1 l_2 l_3) = \sum_{\substack{i,j,k\in\{0,1,2,3\}\\ i+j+k\leq 3}} c''_{i,j,k} \lambda_s^i \lambda_t^j \lambda_u^k,$$

wobei unter Umständen alle $c''_{\cdot,\cdot,k} = 0$ für $(k = 0, \dots, 3)$ sein können.

Unter der Annahme, daß das Gitter kritisch war, findet sich wieder ein lokales Minimum von $|P_{III}|$.

Wie schon im letzten Abschnitt müssen jedoch desweiteren die vielen möglichen Kombinationen von zusätzlichen Gitterpunkten auf K daraufhin untersucht werden, ob bei geeigneter Facettenwahl in (6.5) die Zulässigkeit des Gitters für jede Parameterwahl in (6.6) erhalten bleibt, damit auch in diesen Fällen ein kritisches Gitter vom Typ 2b zu einem lokalen Minimum von $|P_{III}|$ führt.

Der Satz 6.3 liefert uns die Liste der zu betrachtenden Punkte. Da 4 Klassen von Punkten schon für Gitter vom Typ 2a betrachtet wurden, bietet es sich an, die Fallunterscheidung aus dem Beweis von Satz 6.4 nur bezüglich der 3 Klassen neuer Punkte zu ergänzen.

Zunächst noch eine Ergänzung zum Lemma 6.4:

Lemma 6.6. *Für jede Lösung* (v_1, v_2, v_3) *von (6.5) gilt*

$$0 \leq \quad a_7{}^\intercal v_1,\ a_7{}^\intercal v_2,\ a_7{}^\intercal v_3 \quad \leq 1.$$

Beweis. Durch Einsetzen der Punkte $v_1, v_2, v_3, v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + v_3, v_1 + v_2 + v_3$ in die für alle $x \in$ K gültige Doppelungleichung $-1 \leq a_7{}^\intercal x \leq 1$ erhält man in dieser Reihenfolge unter Verwendung von $a_7{}^\intercal(v_1 + v_2 + v_3) = 1$

$$-1 \leq \quad a_7{}^\intercal v_1,\ a_7{}^\intercal v_3,\ a_7{}^\intercal v_3,\ 1 - a_7{}^\intercal v_3,\ 1 - a_7{}^\intercal v_1,\ a_7{}^\intercal v_2,\ 1 \quad \leq 1,$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Im folgenden sei vorausgesetzt, daß das Standardgitter ein Typ 2b-Gitter für K darstellt, also die charakteristischen Gitterpunkte eines Typ 2b-Gitters gemäß (5.18) auf K liegen. Desweiteren bezeichnen die Fälle 1 bis 4 genau die Fälle gleicher Bezeichnung aus dem Beweis von Satz 6.4.

Fall 1: $(-1, 1, 2)$ liegt auf K.
In dieser Situation kann kein Punkt der Klassen (1, 2, 3) und (1, 2, 2) auf K liegen, und aus der Klasse des Punktes (1, 1, 2) kommt nur der Punkt (1, 1, 2) in Frage, denn:

$$\begin{aligned} F(1,2,3) + F(-1,1,2) + 2F(0,1,0) &\geq F(0,5,5) = 5, \\ F(2,1,3) + F(-1,1,2) + F(-1,-1,0) + F(0,-1,0) &\geq F(0,0,5) = 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(1,3,2)+F(-1,1,2) &\geq F(0,4,4)=4,\\
2F(2,3,1)+F(1,-1,-2) &\geq F(5,5,0)=5,\\
F(3,1,2)+F(1,-1,-2) &\geq F(4,0,0)=4,\\
F(3,2,1)+F(1,-1,-2)+F(1,0,1)+F(0,-1,0) &\geq F(5,0,0)=5,\\
F(1,2,2)+F(-1,1,2)+F(0,1,0) &\geq F(0,4,4)=4,\\
F(2,1,2)+F(1,-1,-2) &\geq F(3,0,0)=3,\\
3F(2,2,1)+F(-1,1,2)+2F(1,0,1) &\geq F(7,7,7)=7,\\
F(1,2,1)+F(-1,1,2) &\geq F(0,3,3)=3,\\
F(2,1,1)+F(1,-1,-2)+F(1,0,1) &\geq F(4,0,0)=4.
\end{aligned}$$

Sollte nun der Punkt (1, 1, 2) auf K liegen, so können wir wie in 6.4 die Facettenwahl $a_5 = a_2, a_4 = a_1$ und $a_6 = a_1$ treffen, durch die $(1, 1, 2) \in H(a_1, 1)$ gilt.

Fall 2: Kein Punkt der Klasse (−1, 1, 2) kommt auf K vor; der Punkt (−1, 1, 1) liegt auf K.
Auch diese Situation ähnelt der aus Satz 6.4 weitgehend, denn: Liegt (−1, 1, 1) auf K, so kann kein Punkt der Klassen (1, 2, 3) und (1, 2, 2) auf K liegen, und aus der Klasse (1, 1, 2) kommt nur nur entweder der Punkt (1, 1, 2) oder der Punkt (1, 2, 1) in Frage, denn:

$$\begin{aligned}
2F(1,2,3)+F(-1,1,1)+F(-1,0,0)+2F(0,1,0) &\geq F(0,7,7)=7,\\
2F(2,1,3)+F(-1,1,1)+3F(-1,-1,0) &\geq F(0,0,7)=7,\\
F(1,3,2)+F(-1,1,1)+F(0,0,1) &\geq F(0,4,4)=4,\\
2F(2,3,1)+F(-1,1,1)+3F(-1,0,-1) &\geq F(0,7,0)=7,\\
F(3,1,2)+F(1,-1,-1)+F(0,0,-1) &\geq F(4,0,0)=4,\\
F(3,2,1)+F(1,-1,-1)+F(0,-1,0) &\geq F(4,0,0)=4,\\
F(1,2,2)+F(-1,1,1) &\geq F(0,3,3)=3,\\
F(2,1,2)+2F(1,-1,-1)+F(1,1,0) &\geq F(5,0,0)=5,\\
F(2,2,1)+2F(1,-1,-1)+F(1,0,1) &\geq F(5,0,0)=5,\\
F(2,1,1)+F(1,-1,1) &\geq F(3,0,0)=3,\\
F(1,1,2)+F(1,2,1)+2F(-1,1,1) &\geq F(0,5,5)=5.
\end{aligned}$$

Desweiteren können wegen

$$F(1,2,1)+F(0,1,2)+F(-1,1,1) \geq F(0,4,4)=4$$

nicht (0, 1, 2) und (1, 2, 1) gleichzeitig auftreten. Genauso schließen sich (0, 2, 1) und (1, 1, 2) wegen

$$F(1,1,2)+F(0,2,1)+F(-1,1,1) \geq F(0,4,4)=4$$

aus.

Wir können daher wie in Satz 6.4 die Wahl $a_4 = a_6 = a_1$ treffen, so daß sowohl (1, 1, 2) als auch (1, 2, 1) in der Stützebene $H(a_1, 1)$ an K liegen.

Fall 3: Es sind keine Punkte der Klassen (−1, 1, 2) oder (−1, 1, 1) auf K zu finden. Alle Fälle, in denen kein Punkt der Klassen (1, 2, 3), (1, 2, 2) und (1, 1, 2) auf K vorkommt, sind bereits durch Fall 3 und Fall 4 aus dem Beweis von Satz 6.4 behandelt; in den hier noch zu behandelnden Fällen muß also mindestens einer dieser Punkte auf K liegen.

Zuerst zeigen die folgenden 5 Ungleichungen, daß von den Punkten der Klasse (1, 2, 3) überhaupt immer nur ein Punkt auf K liegen kann, so daß es keine Einschränkung darstellt, anzunehmen, daß aus dieser Klasse der Punkt (1, 2, 3) oder aber kein einziger dieses Typs auf K liegt:

$$\begin{aligned}
F(1,2,3) + F(2,1,3) + 3F(1,1,0) &\geq F(6,6,6) = 6,\\
F(1,2,3) + F(1,3,2) + 2F(-1,-1,0) &\geq F(0,5,5) = 5,\\
F(1,2,3) + F(2,3,1) + F(1,0,0) + F(1,0,1) &\geq F(5,5,5) = 5,\\
F(1,2,3) + F(3,1,2) + F(0,1,0) + F(1,1,0) &\geq F(5,5,5) = 5,\\
F(1,2,3) + F(3,2,1) &\geq F(4,4,4) = 4.
\end{aligned}$$

Nun unterwerfen wir das Gitter der unimodularen Transformation $\Phi = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dabei transformieren sich die Gitterpunkte, die auf K liegen oder dafür in Frage kommen, wie im folgenden aufgeführt:

- Die charakteristischen Gitterpunkte für Typ-2b-Gitter werden nur permutiert:

$$(1,\ 0,\ 0)\,, (0,\ 1,\ 0)\,, (0,\ 0,\ 1)\,, (1,\ 1,\ 0)\,, (0,\ 1,\ 1)\,, (1,\ 0,\ 1)\,, (1,\ 1,\ 1)$$

  gehen unter Φ über in

$$(-1,\ -1,\ -1)\,, (0,\ 1,\ 0)\,, (0,\ 0,\ 1)\,, (-1,\ 0,\ -1)\,, (0,\ 1,\ 1)\,, (-1,\ -1,\ 0)\,, (-1,\ 0,\ 0)\,.$$

- Es ist

$$\Phi\big((1,\ 2,\ 3)\big) = (-1,\ 1,\ 2)\,.$$

- Die Punkte der Klasse (0, 1, 2) transformieren sich unter Φ von

$$(0,\ 1,\ 2)\,, (1,\ 0,\ 2)\,, (0,\ 2,\ 1)\,, (1,\ 2,\ 0)\,, (2,\ 0,\ 1)\,, (2,\ 1,\ 0)$$

  zu

$$(0,\ 1,\ 2)\,, (-1,\ -1,\ 1)\,, (0,\ 2,\ 1)\,, (-1,\ 1,\ -1)\,, (-2,\ -2,\ -1)\,, (-2,\ -1,\ -2)\,.$$

- Schließlich gehen die Klassen (0, −1, 1),(1, 1, 2) und (1, 2, 2) unter Φ von

$$(0,\,-1,\,1)\,,(-1,\,0,\,1)\,,(-1,\,1,\,0)\,,$$
$$(1,\,1,\,2)\,,(1,\,2,\,1)\,,(2,\,1,\,1)\,,$$
$$(1,\,2,\,2)\,,(2,\,1,\,2)\,,(2,\,2,\,1)$$

  in

$$(0,\,-1,\,1)\,,(1,\,1,\,2)\,,(1,\,2,\,1)\,,$$
$$(-1,\,0,\,1)\,,(-1,\,1,\,0)\,,(-2,\,-1,\,-1)\,,$$
$$(-1,\,1,\,1)\,,(-2,\,-1,\,0)\,,(-2,\,0,\,-1)$$

  über.

Es können also a priori alle Punkte der Klassen (−1, 1, 1), (0, 1, 2), (0, −1, 1), (1, 1, 2) sowie die 3 Punkte (−1, 1, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) auf K vorkommen.

Nach der oben gemachten Bemerkung müssen nur noch die Fälle untersucht werden, in denen mindestens einer der folgenden 7 Punkte auf K liegt: (−1, 1, 2), (−1, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 1), (−1, 0, 1), (−1, 1, 0), (2, 1, 1). Der Einfachheit halber behandeln wir noch zwei weitere Fälle (3c und 3d), so daß die Anzahl der Punktkombinationen in jedem einzelnen Fall kleiner wird.

Der Rest des Beweises benutzt Koordinaten bezüglich der Transformation Φ.

Fall 3a: (−1, 1, 2) liegt auf K.
Diese Situation ist bereits durch Fall 1 dieses Beweises abgedeckt.

Fall 3b: (−1, 1, 2) liegt nicht auf K, ein Punkt der Klasse (−1, 1, 1) liegt auf K.
Obwohl nicht mehr die Basisvektoren vertauscht werden dürfen, um anzunehmen, daß der Punkt (−1, 1, 1) auf K liegt, ohne daß die Menge der zu betrachtenden Gitterpunkte sich verändert, ist diese Annahme keine Einschränkung, denn statt dessen kann die Numerierung der Facetten in (6.5) entsprechend verändert werden, denn deren Reihenfolge spielte bisher in der Argumentation keine Rolle: Vertauscht man zum Beispiel a_1 mit a_2 und a_5 mit a_6, so entspricht dies dem Austausch von (−1, 1, 1) gegen (1, −1, 1). Daher genügt es doch, nur die Situation, in der sich (−1, 1, 1) auf K befindet, zu untersuchen, was wir jedoch schon in Fall 2 des Beweises getan haben.

Fall 3c: Der Punkt (2, 1, 2) liegt auf K, der Punkt (−1, 1, 2) und alle Punkte der Klasse (−1, 1, 1) liegen nicht auf K.
Der Punkt (2, 2, 1) kann nicht gleichzeitig mit (2, 1, 2) auf K liegen, denn

$$F(2,1,2) + F(2,2,1) + F(0,1,1) \geq F(4,4,4) = 4.$$

Da (2, 2, 1) auf K liegt, gilt $-1 \leq 2{a_7}^{\mathsf{T}}v_1 + {a_7}^{\mathsf{T}}v_2 + {a_7}^{\mathsf{T}}v_3 \leq 1$, und daher $-2 \leq {a_7}^{\mathsf{T}}v_1 + {a_7}^{\mathsf{T}}v_3 \leq 0$. Da aber nach Lemma 6.6 ${a_7}^{\mathsf{T}}v_1 \geq 0$ und ${a_7}^{\mathsf{T}}v_3 \geq 0$ gilt, müssen beide Terme $= 0$ sein, und daher ist ${a_7}^{\mathsf{T}}v_2 = 1$. Wir können also $a_7 = a_2$ in (6.5) wählen, was dann wegen Lemma 6.4 für jede Lösung von (6.5) die Bedingung $a_2{}^\intercal v_1 = a_2{}^\intercal v_3 = 0$ zur Folge hat, so daß alle Punkte der Klasse (−1, 1, 1) und die Punkte (0, 1, 2), (2, 1, 0), (1, 1, 2), (2, 1, 1) in $H(a_2, 1)$ oder $H(a_2, -1)$ liegen. Die 3 Punkte (0, 2, 1), (1, 2, 0) und (1, 2, 1) können überhaupt nicht auf K liegen, denn:

$$\begin{aligned} F(0,2,1) + 2F(2,1,2) + F(1,1,0) &\geq F(5,5,5) = 5, \\ F(1,2,0) + 2F(2,1,2) + F(0,1,1) &\geq F(5,5,5) = 5, \\ F(1,2,1) + F(2,1,2) &\geq F(3,3,3) = 3. \end{aligned}$$

Nun sind nur noch 3 weitere Punkte zu betrachten: Falls (1, 0, −1) auf K vorkommt, dann folgt $a_1{}^\intercal v_3 = 0$, so daß wir mit der Wahl $a_6 = a_1$ erreichen können, daß die Bedingung $a_1{}^\intercal v_3 = 0$ für jede Lösung von (6.5) erfüllt ist. Die Punkte (2, 0, 1) und (1, 0, 2) können nicht gleichzeitig vorkommen, weil $F(2,0,1) + F(1,0,2) \geq F(3,0,3) = 3$ ist. Falls der erste Punkt auf K liegt, so ist $a_1{}^\intercal v_3 = -1$ und daher auch $a_1{}^\intercal v_2 = 0$, denn es ist ja $a_1{}^\intercal v_2 + a_1{}^\intercal v_3 \leq -1$ und $a_1{}^\intercal v_2 \leq 0$ wegen Lemma 6.4. Daher können wir $a_5 = -a_1$ und $a_4 = a_1$ wählen, und erreichen so das Gewünschte. Im Fall des anderen Punktes ist $a_3{}^\intercal v_1 = -1$ und $a_3{}^\intercal v_2 = 0$, so daß wir analog zu oben $a_5 = a_3$ und $a_4 = -a_3$ wählen.

Fall 3d: Der Punkt (2, 2, 1) liegt auf K, die Punkte (−1, 1, 2), (2, 1, 2) und alle Punkte der Klasse (−1, 1, 1) liegen nicht auf K.
Durch Vertauschen von a_2 gegen a_3 und a_4 gegen a_6 finden wir dieselbe Situation wie in Fall 3c wieder.

Fall 3e: Der Punkt (2, 1, 0) liegt auf K, die Punkte (−1, 1, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1) und alle Punkte der Klasse (−1, 1, 1) liegen nicht auf K.
Liegt (2, 1, 0) auf K, so gilt $-1 \leq 2a_1{}^\intercal v_1 + a_2{}^\intercal v_2 \leq 1$, also $a_1{}^\intercal v_2 = -1$ und $a_1{}^\intercal v_3 = 0$. Daher können wir $a_5 = -a_1$ und $a_6 = a_1$ wählen und finden dann die folgenden Punkte in $H(a_1, 1)$ oder $H(a_1, -1)$: (1, 0, −1), (0, 1, −1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 2). Die Punkte (1, −1, 0), (1, 2, 0), (0, 2, 1) und (2, 0, 1) können nicht gemeinsam mit (2, 1, 0) auf K liegen: die ersten beiden nicht wegen

$$\begin{aligned} F(1,-1,0) + F(2,1,0) &\geq F(3,0,0) = 3, \\ F(1,2,0) + F(2,1,0) &\geq F(3,3,0) = 3, \end{aligned}$$

und für die anderen beiden gilt (0, 2, 1) $\in H(-a_1, -2)$ und (2, 0, 1) $\in H(a_1, 2)$, aber $H(a_1, 1)$ war ja eine Stützebene an K.

Nur der Punkt (1, 1, 2) erfordert gesonderte Behandlung. Sollte er auf K liegen, so gilt wegen Lemma 6.6 notwendig $a_7{}^\intercal v_3 = 0$, so daß wir $a_7 = a_4$ wählen können und dann für jede Lösung von (6.5) immer (1, 1, 2) $\in H(a_4, 1)$ finden.

Fall 3f: Der Punkt (2, 0, 1) liegt auf K, die Punkte (−1, 1, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 0) und alle Punkte der Klasse (−1, 1, 1) liegen nicht auf K.
Durch Tausch von a_2 gegen a_3 und a_4 gegen a_6 läßt sich dieser Fall genau wie Fall 3e behandeln.

Fall 3g: Der Punkt (−1, 1, 0) liegt auf K, die Punkte (−1, 1, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 1) und alle Punkte der Klasse (−1, 1, 1) liegen nicht auf K.

Sollten (−1, 0, 1) und/oder (0, −1, 1) die einzigen weiteren Punkte auf K sein, so liegt eine in Fall 4 des Beweises von Satz 6.4 behandelte Situation vor. Von den Punkten (1, 1, 2), (1, 2, 1) und (2, 1, 1) können höchstens 2 gleichzeitig auf K liegen, denn

$$F(1,1,2) + F(1,2,1) + F(2,1,1) \geq F(4,4,4) = 4.$$

Sollte (1, 2, 1) auf K liegen, so kann der Punkt (0, −1, 1) nicht mehr vorkommen, und falls (2, 1, 1) auf K liegt, so liegt (−1, 0, 1) außerhalb, denn:

$$F(1,2,1) + F(-1,1,0) + F(0,1,-1) \geq F(0,4,0) = 4,$$
$$F(2,1,1) + F(1,0,-1) + F(1,-1,0) \geq F(4,0,0) = 4.$$

Es bleiben also die folgenden Kombinationsmöglichkeiten:
(1, 1, 2) und (1, 2, 1): Hier findet sich $a_7{}^\intercal v_2 = a_7{}^\intercal v_3 = 0$, so daß wir $a_7 = a_1$ wählen dürfen. Sollte zusätzlich (1, 0, −1) auf K vorkommen, so ist $a_1{}^\intercal v_2 = a_1{}^\intercal v_2 = 0$, wir können statt dessen also $a_4 = a_6 = a_1$ wählen, und finden die beiden ersten Punkte dann immer in $H(a_1, 1)$.
(1, 1, 2) und (2, 1, 1): analog zur vorangegangen Kombination ist hier notwendig $a_7{}^\intercal v_1 = a_7{}^\intercal v_2 = 0$, und wir wählen also $a_7 = a_2$. Sollte zusätzlich (0, −1, 1) vorkommen, so liegt dieser Punkt dann schon in $H(a_2, -1)$.
(1, 2, 1) und (2, 1, 1): Hier findet man $a_7{}^\intercal v_1 = a_7{}^\intercal v_2 = 0$, so daß wir $a_7 = a_3$ wählen.
(1, 2, 1) auf K: Es ist $a_2{}^\intercal v_1 = 0$ und auch $a_2{}^\intercal v_3 = -1$, also können wir $a_4 = a_2$ und $a_6 = -a_2$ wählen, so daß wir auch $(-1, 0, 1) \in H(a_2, -1)$ finden.
(2, 1, 1) auf K: Hier findet sich $a_1{}^\intercal v_2 = 0$ und dann $a_1{}^\intercal v_3 = -1$, daher wählen wir $a_4 = a_1$ und $a_5 = -a_1$, so daß sich der Punkt in $H(a_1, 1)$ befindet. In dieser Stützebene liegt dann auch der Punkt (0, −1, 1).
(1, 1, 2) auf K: Wenn auch (−1, 0, 1) auf K liegt, so finden wir wie oben $a_1{}^\intercal v_2 = a_1{}^\intercal v_3 = 0$ und können diesen Fall genau so behandeln. Sollte (0, 1, −1) auf K liegen, dann ist $a_2{}^\intercal v_1 = a_2{}^\intercal v_3$, und die Wahl $a_4 = a_5 = a_2$ zulässig, so daß beide Punkte in $H(a_2, 1)$ zu liegen kommen. (Es können nicht gleichzeitig (−1, 0, 1) und (0, −1, 1) mit (1, 1, 2) auf K liegen, denn $F(1,1,2) + F(-1,0,1) + F(0,-1,1) \geq F(0,0,4) = 4$.)

Einzig der Fall, daß (1, 1, 2) außer (−1, 1, 0) und den für Typ 2b-Gitter charakteristischen Punkten aus (5.18) der einzige Punkt auf K ist, ist jetzt noch offen; diese Situation wird in Lemma 6.7 gesondert behandelt.

Fall 3h: Der Punkt (−1, 0, 1) liegt auf K, die Punkte (−1, 1, 2), (−1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 0) und (2, 0, 1) liegen nicht auf K.
Alle in diesem Fall vorkommenden Kombinationen finden sich, wenn man a_2 gegen a_3 und a_4 gegen a_6 vertauscht, schon analog in Fall 3g.

Fall 3i: Der Punkt (−1, 1, 0) liegt auf K, die Punkte (−1, 1, 2), (−1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 1, 0), (2, 0, 1) und (−1, 0, 1) liegen nicht auf K.
Auch die hier auftretenden Kombinationsmöglichkeiten lassen sich analog zu Fall 3g behandeln: Liegt nur (2, 1, 1) auf K so folgt $a_7{}^\intercal v_1 = 0$ und wir wählen $a_7 = a_5$; kommt (0, −1, 1) zusätzlich vor, so verweisen wir auf Lemma 6.7; kommt statt dessen (1, 2, 1)

hinzu, so gilt $a_7{}^\mathsf{T} v_1 = a_7{}^\mathsf{T} v_2 = 0$ und wir wählen $a_7 = a_3$; kommt statt dessen $(1, 1, 2)$ vor, so gilt analog $a_7{}^\mathsf{T} v_1 = a_7{}^\mathsf{T} v_3 = 0$ und wir treffen die Wahl $a_7 = a_2$. Kommt im letzten Fall noch $(0, -1, 1)$ hinzu, finden wir diesen Punkt schon in $H(a_2, -1)$.

Das bisherige Ergebnis läßt sich, da wieder der allgemeine Fall durch eine lineare Transformation auf den oben behandelten zurückgeführt werden kann, zusammenfassen als

Satz 6.5. *Ist $\Lambda = V\mathbb{Z}^d$ ein kritisches Gitter vom Typ 2b für den Körper* K *und liegen außer den für Gitter vom Typ 2b charakteristischen Gitterpunkten nicht nur die Punkte $(-1, 1, 0)_V$ und $(1, 1, 2)_V$ oder ein dazu unimodular äquivalentes Paar und seine Gegenpunkte auf* K*, so gibt es eine Auswahl von 7 Facettenungleichungen von* K*, so daß alle auf* K *liegenden Gitterpunkte in diesen 7 Facettenhyperebenen liegen.*

Tatsächlich lassen sich die Punktekombinationen des verbleibenden Typs nicht auf so einfache Art und Weise wie oben behandeln. Während es bisher immer möglich war, die Gleichungen in (6.5) als Facetten-Stützebenen an K geeignet zu wählen, muß in diesem Fall im Allgemeinen eine Stützebene benutzt werden, die sich als Linearkombination von solchen Facetten-Stützebenen ergibt.

Lemma 6.7. *Ist Λ ein Gitter vom Typ 2b und liegen bezüglich einer Basis $V = (v_1, v_2, v_3)$ von Λ noch die Punkte $v_1 + v_2 + 2v_3$ und $v_1 - v_2$ auf* K*, so existieren 7 Stützebenen $H(a_1, 1), \ldots, H(a_7, 1)$ für* K*, so daß das Gleichungssytem*

$$\begin{array}{lllllll} a_1{}^\mathsf{T} v_1 & & & & & = 1 \\ & & a_2{}^\mathsf{T} v_2 & & & = 1 \\ & & & & a_3{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\ a_4{}^\mathsf{T} v_1 & + & a_4{}^\mathsf{T} v_2 & & & = 1 \\ & & a_5{}^\mathsf{T} v_2 & + & a_5{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\ a_6{}^\mathsf{T} v_1 & & & + & a_6{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \\ a_7{}^\mathsf{T} v_1 & + & a_7{}^\mathsf{T} v_2 & + & a_7{}^\mathsf{T} v_3 & = 1 \end{array} \tag{6.7}$$

erfüllt ist, und $w_1 + w_2 + 2w_3$ und $w_1 - w_2$ für keine Lösung (w_1, w_2, w_3) des Gleichungssystems (6.7) im Inneren von K *liegen. Dabei lassen sich $a_i{}^\mathsf{T} x \leq 1$ für $i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ als facettendefinierende Ungleichungen für* K *und $a_4 = la_1 + ma_2 = -na_3 + qa_7$ mit $la_1 + ma_2 + na_3 = qa_7$, $(l, m, n, q \in \mathbb{R})$ und $l + m = q + n = 1$ so wählen, daß $H(a_4, 1)$ eine Stützebene an* K *bestimmt, oder aber es kann einfach $a_4{}^\mathsf{T} x \leq 1$ auch als Facettenungleichung gewählt werden.*

Beweis. Wir nehmen wieder o.B.d.A. $v_i = e_i$ an.

Zunächst wählen wir wie schon früher für die Punkte $v_1, v_2, v_3, v_2 + v_3$ und $v_1 + v_2 + v_3$ Zeilenvektoren $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_7$ aus A aus, so daß die Punkte jeweils in der durch $H(a_i, 1)$ für $i \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$ bestimmten Facetten-Stützebene von K liegen.

Nun liegen sowohl $v_1 + v_2$ als auch $v_1 - v_2$ auf K, also gelten

$$-1 \leq a_1{}^\mathsf{T} v_1 + a_1{}^\mathsf{T} v_2 \leq 1 \qquad \text{und} \qquad -1 \leq a_1{}^\mathsf{T} v_1 - a_1{}^\mathsf{T} v_2 \leq 1,$$

wobei $a_1{}^\mathsf{T} v_1 = 1$ ist, also ist $a_1{}^\mathsf{T} v_2 = 0$. Auf gleiche Art und Weise folgt $a_2{}^\mathsf{T} v_1 = 0$.

Weil außer $v_1 + v_2 + 2v_3$ auch $v_1 + v_2$ auf K liegt, erhalten wir

$$-1 \leq a_3{}^\intercal v_1 + a_3{}^\intercal v_2 + \underbrace{2a_3{}^\intercal v_3}_{=2} \leq 1 \qquad \text{und} \qquad -1 \leq a_3{}^\intercal v_1 + a_3{}^\intercal v_2 \leq 1,$$

also ist $a_3{}^\intercal v_1 + a_3{}^\intercal v_2 = -1$. Außerdem ist

$$-1 \leq \underbrace{a_7{}^\intercal v_1 + a_7{}^\intercal v_2 + a_7{}^\intercal v_3}_{=1} + a_7{}^\intercal v_3 \leq 1,$$

und wegen Lemma 6.6 ist daher $a_7{}^\intercal v_3 = 0$.

Sollte nun $a_1{}^\intercal v_3 = 0$ oder $a_2{}^\intercal v_3 = 0$ gelten, so können wir, wie schon früher im Fall daß $(-1,\ 1,\ 2)$ auf K liegt, einfach $a_6 = a_1$ und dann $a_4 = a_1$ oder $a_5 = a_2$ und dann $a_4 = a_2$ wählen und sind fertig. Genauso läßt sich der Fall $a_1{}^\intercal v_3 = -1$ oder $a_2{}^\intercal v_3 = -1$ dadurch behandeln, daß $a_4 = -a_1$ und $a_5 = -a_1$ oder $a_4 = -a_2$ und $a_6 = -a_2$ gewählt werden, so daß im ersten Falle $(1,\ -1,\ 0) \in H(a_1, 1)$ und $(1,\ 1,\ 2) \in H(a_1, -1)$ bzw. im zweiten Falle $(1,\ -1,\ 0) \in H(a_2, -1)$ und $(1,\ 1,\ 2) \in H(a_2, -1)$ gilt.

Man kann nun immer reelle Faktoren l, m, n, q, die nicht alle Null sind, finden, so daß

$$la_1 + ma_2 + na_3 = qa_7 \tag{6.8}$$

gilt, weil nicht a_1, a_2, a_3 und a_7 linear unabhängig sein können. Wir können, ohne die Menge der Gitterpunkte auf K zu verändern, die Vektoren v_1, v_2, v_3 vertauschen, so daß a_1, a_2, a_3 beliebig permutiert werden. Mit Hilfe der unimodularen Transformation $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ tauschen a_1 und a_7 ihre Rolle, so daß wir also sogar a_1, a_2, a_3 und a_7 in (6.8) beliebig permutieren können. Daher können wir $|l|, |m|, |n| \leq |q|$ annehmen.

Wenden wir die Form (6.8) auf $(1,\ 1,\ 1)$ und $(0,\ 0,\ -1)$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} q &= (la_1 + ma_2 + na_3)^\intercal (v_1 + v_2 + v_3) \\ &= l(1 + a_1{}^\intercal v_3) + m(1 + a_2{}^\intercal v_3) \end{aligned} \tag{6.9}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= (la_1 + ma_2 + na_3)^\intercal (-v_3) \\ &= -la_1{}^\intercal v_3 - ma_2{}^\intercal v_3 - n. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Es gilt $0 > a_1{}^\intercal v_3 > -1$ und $0 > a_2{}^\intercal v_3 > -1$, und weil $|l| \leq |q|$ und $|m| \leq |q|$ ist, folgt aus (6.9), daß die Vorzeichen von l, m und q übereinstimmen. Dann stimmen wegen (6.10) auch die Vorzeichen von l, m und n überein. Durch Addition von (6.9) und (6.10) finden wir $l + m = n + q$, und es stellt keine Einschränkung der Voraussetzung (6.8) dar, diese Terme auf $l + m = n + q = 1$ zu normieren.

Wir wählen nun $a_4 = la_1 + ma_2$. Wegen (6.8) ist $la_1 + ma_2 = -na_3 + qa_7$. Da $l + m = 1$ gewählt war, gelten $a_4{}^\intercal x = la_1{}^\intercal x + ma_2{}^\intercal x \leq l + m = 1$ und $a_4{}^\intercal x \geq -1$ für alle $x \in$ K. Da $a_4{}^\intercal(v_1 + v_2) = l + m = 1$ ist, wird so $H(a_4, 1)$ sogar Stützebene an K im Punkt $v_1 + v_2$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß mit den oben gemachten Festlegungen tatsächlich für jede Lösung v_1', v_2', v_3' von (6.7) die Punkte $v_1' - v_2'$ und $v_1' + v_2' + 2v_3'$ nicht im Inneren von K liegen können. Das folgt aus folgenden Überlegungen:
Für jede Lösung gelten $a_1{}^\intercal v_1' = 1, a_2{}^\intercal v_2' = 1$ und $(la_1 + ma_2)(v_1' + v_2') = 1$. Aus der letzten Gleichung folgt daher $la_1{}^\intercal v_2' + ma_2{}^\intercal v_1' = 0$, es sind also entweder beide Summanden gleich Null, oder aber sie haben verschiedene Vorzeichen. Da $l, m \geq 0$ angenommen worden waren, können $\alpha_1 := a_1{}^\intercal v_2'$ und $\alpha_2 := a_2{}^\intercal v_1'$ nicht dasselbe Vorzeichen haben, wenn sie nicht Null sind. Nun ist aber

$$\begin{aligned} a_1{}^\intercal(v_1' - v_2') &= a_1{}^\intercal v_1' - a_1{}^\intercal v_2' = 1 - \alpha_1 \\ -a_2{}^\intercal(v_1' - v_2') &= -a_2{}^\intercal v_1' + a_2{}^\intercal v_2' = 1 - \alpha_2, \end{aligned}$$

und somit liegt $v_1' - v_2'$ zumindest in einem der Halbräume $H^+(a_1, 1)$ oder $H^+(a_2, 1)$. Ähnlich läßt sich für den anderen Punkt argumentieren. Wegen $1 = (-na_3 + qa_7)^\intercal(v_1' + v_2')$, $a_3{}^\intercal v_3' = 1$, $n + q = 1$ und $a_7{}^\intercal v_1' + a_7{}^\intercal v_2' + a_7{}^\intercal v_3' = 1$ erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= -na_3{}^\intercal v_1' - na_3{}^\intercal v_2' + qa_7{}^\intercal v_1' + qa_7{}^\intercal v_2' \\ &= -na_3{}^\intercal v_1' - na_3{}^\intercal v_2' + q - qa_7{}^\intercal v_3' \\ \Longrightarrow \qquad 1 - q - n &= -na_3{}^\intercal v_1' - na_3{}^\intercal v_2' - na_3{}^\intercal v_3' - qa_7{}^\intercal v_3' \\ \Longrightarrow \qquad 0 &= -n(a_3{}^\intercal v_1' + a_3{}^\intercal v_2' + a_3{}^\intercal v_3') - qa_7{}^\intercal v_3'. \end{aligned}$$

Da $q, n > 0$ angenommen wurde, können hier $\beta_1 := a_7{}^\intercal v_3'$ und $\beta_2 := a_3{}^\intercal(v_1' + v_2' + v_3')$ nur beide Null sein, oder sie müssen verschiedene Vorzeichen haben. Daher findet sich wegen

$$\begin{aligned} a_7{}^\intercal(v_1' + v_2' + 2v_3') &= 1 + \beta_1 \\ a_3{}^\intercal(v_1' + v_2' + 2v_3') &= 1 + \beta_2 \end{aligned}$$

der Punkt $v_1' + v_2' + 2v_3'$ zumindest in einem der Halbräume $H^+(a_7, 1)$ oder $H^+(a_3, 1)$. □

Bemerkung 6.1: Das obige Lemma schließt bereits die Kombinationen $(1,\ 2,\ 1)_V$ mit $(1,\ 0,\ -1)_V$ und $(2,\ 1,\ 1)_V$ mit $(0,\ 1,\ -1)_V$ ein, denn diese können durch Vertauschen der Basisvektoren untereinander jeweils in das im Lemma vorausgesetzte Punktepaar überführt werden.

Lemma 6.8. *In der Situation von Lemma 6.7, wo die Stützebene $H(a_4, 1)$ als Linearkombination von zwei Facetten-Stützebenen gewählt werden mußte, gilt für die Matrix M_4 in (6.7)* $\operatorname{rang}(M_4) \geq 6$, *wenn $\Lambda = V\mathbb{Z}^3$ ein kritisches Gitter war.*

Beweis. Zunächst wollen wir die bereits bekannten Tatsachen aus den vorhergehenden Argumenten zusammenfassen. Bezüglich der Basis $V = (v_1, v_2, v_3)$ liegen außer den charakteristischen Punkten aus (5.18) nur die Punkte $(1,\ -1,\ 0)_V$ und $(1,\ 1,\ 2)_V$ auf K. Es sind a_i $(1 \leq i \leq 7)$ außer a_4 Normalenvektoren von Facetten von K, und es existieren $l, m, n, q \geq 0$ mit

$$la_1 + ma_2 = -na_3 + qa_7, \qquad l + m = n + q = 1;$$

wir haben $a_4 = la_1 + ma_2$ gesetzt. Desweiteren gelten

$$\begin{gathered} {a_1}^\mathsf{T} v_1 = {a_2}^\mathsf{T} v_1 = 0, \quad {a_7}^\mathsf{T} v_3 = 0, \\ {a_3}^\mathsf{T}(v_1 + v_2) = -1, \quad {a_7}^\mathsf{T}(v_1 + v_2) = 1, \quad {a_7}^\mathsf{T} v_1, {a_7}^\mathsf{T} v_2 \geq 0. \end{gathered} \tag{6.11}$$

Unter den Voraussetzungen des Lemmas können wir desweiteren

$$-1 < {a_1}^\mathsf{T} v_3, {a_2}^\mathsf{T} v_3 < 0$$

annehmen.

Die letzte Ungleichung impliziert, daß a_1, a_2, a_7 linear unabhängig sind, denn schreibt man $(a_1 a_2 a_7)$ für die 3×3-Matrix mit Zeilen a_1, a_2, a_7, so ist

$$\left|\det\bigl((a_1 a_2 a_7)V\bigr)\right| = \left|-{a_7}^\mathsf{T} v_1 \cdot {a_1}^\mathsf{T} v_3 - {a_7}^\mathsf{T} v_2 \cdot {a_2}^\mathsf{T} v_3\right| > 0.$$

Wir wollen nun annehmen, der Rang der Matrix M_4 aus (6.7) sei nicht 7, also die Zeilen seien linear abhängig, dann können wir wie in Lemma 6.5 annehmen, daß die letzte Zeile Linearkombination der ersten 6 Zeilen von M_4 ist. Wir zeigen nun, daß die ersten 6 Zeilen linear unabhängig sind, also $\operatorname{rang}(M_4) = 6$ ist: Angenommen die ersten 6 Zeilen von M_4 seien linear abhängig, das heißt, es existieren 6 Koeffizienten μ_i $(i = 1, \dots, 6)$, die nicht alle verschwinden, so daß das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mu_1 a_1 + \mu_4 a_4 + \mu_6 a_6 &= 0 \\ \mu_2 a_2 + \mu_4 a_4 + \mu_5 a_5 &= 0 \\ \mu_3 a_3 + \mu_5 a_5 + \mu_6 a_6 &= 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

erfüllt ist. Addiert man die ersten beiden Zeilen dieses Gleichungssystems und zieht die letzte ab, so erhält man

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + 2\mu_4 a_4 = \mu_3 a_3. \tag{6.13}$$

Es sind aber unter unseren Voraussetzungen a_1, a_2 und a_3 linear unabhängig: Betrachtet man ähnlich wie oben für a_1, a_2, a_7 den Ausdruck

$$D := \left|\det\bigl((a_1 a_2 a_3)V\bigr)\right| = \left|1 - {a_3}^\mathsf{T} v_2 \cdot {a_2}^\mathsf{T} v_3 - {a_3}^\mathsf{T} v_1 \cdot {a_1}^\mathsf{T} v_3\right|,$$

so stellt man fest, daß

$$D = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (-{a_3}^\mathsf{T} v_2){a_2}^\mathsf{T} v_3 + (-{a_3}^\mathsf{T} v_1){a_1}^\mathsf{T} v_3 = -1.$$

Rechts steht aber eine Konvexkombination von ${a_2}^\mathsf{T} v_3$ und ${a_1}^\mathsf{T} v_3$, und da diese beiden Skalarprodukte als > -1 angenommen wurden, kann diese nie den Wert -1 annehmen. Also sind a_1, a_2, a_3 linear unabhängig.

Daher muß nach Einsetzen von $a_4 = la_1 + ma_2$ in (6.13) $\mu_3 = 0$ und auch $\mu_1 + 2\mu_4 l = \mu_2 + 2\mu_4 m = 0$ gelten. Dann folgt aber aus der letzten Zeile des Gleichungssystems (6.12), daß $\mu_5 a_5 + \mu_6 = 0$ ist. Da a_5 und a_6 Facettennormalenvektoren von K waren, kann nur $\mu_5 = \mu_6 = 0$ oder (ggf. nach Skalierung) $\mu_5 = 1$ und damit $a_5 = \pm a_6$ gelten. Im ersten Falle ist $\mu_1 a_1 + \mu_4 a_4 = 0$, also $(\mu_1 + \mu_4 l)a_1 + \mu_4 m a_2 = 0$, so daß auch $\mu_4 = 0$ und $\mu_1 = 0$ sind, was nicht sein kann.

Wäre nun $a_5 = a_6$, so hätten wir $1 = a_5{}^\intercal(v_2 + v_3)$ und $1 = a_6{}^\intercal(v_1 + v_3) = a_5{}^\intercal(v_1 + v_3)$, also $a_5{}^\intercal(v_1 + v_2 + 2v_3) = 2$. Wir hatten aber $v_1 + v_2 + 2v_3 \in \partial \mathrm{K}$ angenommen, was ein Widerspruch dazu ist. Also bleibt nur $a_5 = -a_6$, so daß $1 = a_5{}^\intercal(-v_2 - v_3)$ und $-1 = -a_6{}^\intercal(v_1 + v_3) = a_5{}^\intercal(v_1 + v_3)$ gelten, was zu $-2 = a_5{}^\intercal(v_1 - v_2)$ Anlaß gibt und daher im Widerspruch zur Annahme $v_1 - v_2 \in \partial \mathrm{K}$ steht.
Daher müssen die ersten 6 Zeilen von M_4 linear unabhängig sein und es ist $\operatorname{rang}(M_4) \geq 6$. □

Damit ist es auch in diesem letzten Fall möglich, die Determinante des Gitters als Polynom in drei Variablen auszudrücken. Diesmal bestimmt man dazu eine spezielle Lösung w des Gleichungssystems $M_4 w = 0$ und ein Erzeugendensystem (s, t, u) des Lösungsraums (ggf. sei $u = 0$ wenn der Lösungsraum zweidimensional ist), und es ist wieder

$$\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \lambda_s \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \lambda_t \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \lambda_u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

eine Darstellung aller Lösungen des Gleichungssystems (6.7). Dann ist

$$P_{IV}(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u) := \det(l_1 l_2 l_3) = \sum_{\substack{i,j,k \in \{0,1,2,3\} \\ i+j+k \leq 3}} c'''_{i,j,k} \lambda_s^i \lambda_t^j \lambda_u^k,$$

und mit der bekannten Argumentation findet man, daß jedes kritische Gitter vom Typ 2b, das die spezielle Behandlung von Lemma 6.7 erfordert, ein lokales Minimum von $|P_{IV}|$ liefert.

Dies schließt die Behandlung der Gitter vom Typ 2b ab. Der folgende Satz faßt die Ergebnisse zusammen:

Satz 6.6. *Ist Λ ein kritisches Gitter von Typ 2b für den konvexen Körper* K*, so gibt es entweder eine Auswahl von 7 nicht notwendig verschiedenen Facettenungleichungen von* K*, so daß für dieses Gitter $|P_{III}|$ ein lokales Minimum besitzt, oder man kann 6 Facettenungleichungen und eine Stützebene, die als Linearkombination von zwei der Facettenungleichungen darstellbar ist, so finden, daß $|P_{IV}|$ für dieses Gitter ein lokales Minimum besitzt.*

6.4 Berechnungsverfahren

Ist ein konvexes Polytop K durch k facettendefinierende Ungleichungen als $Ax \leq 1$ gegeben, so kann man auf folgende Art und Weise ein für K kritisches Gitter finden:

Require: K gegeben durch k facettendefinierende Ungleichungen $Ax \leq 1$
  M_1, M_2, M_3, M_4 und $P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}$ wie oben definiert
  Liste L der potentiell kritischen Gitter ist leer
  for all $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ eine Auswahl von Zeilen von A **do**
    if rang $(M_1) = 6$ **then**
      for all $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ Nullstelle von grad (P_I) **do**
        if zu $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ gehörige Lösungsvektoren (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig **then**
          if Bedingung (5.16) erfüllt **then**
            $L \leftarrow L \oplus [v_1, v_2, v_3]$
    if rang $(M_2) = 6$ **then**
      for all $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ Nullstelle von grad (P_{II}) **do**
        if zu $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ gehörige Lösungsvektoren (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig **then**
          if Bedingung (5.17) erfüllt **then**
            $L \leftarrow L \oplus [v_1, v_2, v_3]$
    if rang $(M_3) \geq 6$ **then**
      for all $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ Nullstelle von grad (P_{III}) **do**
        if zu $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ gehörige Lösungsvektoren (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig **then**
          if Bedingung (5.18) erfüllt **then**
            $L \leftarrow L \oplus [v_1, v_2, v_3]$
    if rang $(M_4) \geq 6$ AND Es gibt $l, m, n, q \neq (0,0,0,0)$ mit $la_1 + ma_2 + na_3 = qa_7$ und $l + m = n + q = 1$ **then**
      for all $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ Nullstelle von grad (P_{IV}) **do**
        if zu $(\lambda_s, \lambda_t, \lambda_u)$ gehörige Lösungsvektoren (v_1, v_2, v_3) linear unabhängig **then**
          if Bedingung (5.18) erfüllt **then**
            $L \leftarrow L \oplus [v_1, v_2, v_3]$
Ensure: $[v_1^*, v_2^*, v_3^*] \in \underset{[v_1,v_2,v_3]\in L}{\text{minarg}} (\det(v_1, v_2, v_3))$ ist kritisch für K

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Ausgehend von der Frage nach einer „möglichst dichten gitterförmigen Anordnung“ von kongruenten Kopien eines konvexen Körpers $K \in \mathfrak{K}^d$, stellt sich heraus, daß es genügt, das Problem für den Differenzkörper $\mathcal{D}K$ von K zu lösen. Dieses Problem ist äquivalent zum nichtlinearen Optimierungsproblem

$$\min_{\Lambda \text{ kritisch für } \mathcal{D}K} \det \Lambda.$$

Für die Dimension $d = 3$ braucht man, anstatt das Minimum über alle kritischen Gitter zu bilden, nur Gitter von drei sehr speziellen Formen betrachten. Um dies praktisch durchführen zu können, wurde für Polytope eine Methode entwickelt, bei der man durch das Lösen von Gleichungssystemen und das Finden von lokalen Extrema gewisser Polynome in 3 Variablen vom Totalgrad 3 eine endliche Liste von Gittern erhält, die mindestens ein kritisches Gitter enthält. Dieses, zunächst nur theoretische, Verfahren scheint für Polytope, deren Facettenzahl nicht zu groß ist, mit heutigen Computern praktisch durchführbar zu sein. Das erste Hauptproblem einer Implementierung liegt in der Reduzierung der wirklich zu untersuchenden Facettenungleichungen. Anschließend müssen für jedes gelöste Gleichungssystem die Nullstellen eines reellen Polynoms in 3 Variablen gefunden werden; mit Hilfe von Gröbner-Basen ist dies im Prinzip möglich, aber in der Implementierung nicht ohne erheblichen Aufwand *schnell* machbar. Nimmt man an, man könnte die Nullstellen von 1000 solchen Polynomen pro Sekunde finden und ignoriert den Aufwand für das Lösen der Gleichungssysteme etc., so sind bei einem konvexen Polytop mit 100 Facetten allein zum Testen aller 7-er Facettenauswahlen $100^7/1000$ Sekunden ≈ 3171 Jahre Rechenzeit erforderlich. Natürlich können durch Beachtung der Rangbedingungen für $M_1, \ldots, M_4$ schon eine gewisse Anzahl von Tests eingespart werden, der Aufwand bleibt ohne Anwendung zusätzlicher Einschränkungen bei der Facettenauswahl jedoch enorm. Hier sind noch etliche Verbesserungen in der Vorgehensweise denkbar, etwa die Ausnutzung weiterer Symmetrien des Körpers oder Untersuchungen, ob nicht a priori Facetten erkannt werden können, die keinen Einfluß auf die Dichte der möglichen Packung haben (anschaulich ist es zum Beispiel unwahrscheinlich, daß man ein zulässiges Gitter bei einer Facettenauswahl finden kann, wenn die Normalenvektoren der ausgewählten Facetten untereinander paarweise nur kleine Winkel einschließen). Weitergehende Untersuchungen in diese Richtung wurden von M. Henk und U. Betke in [14] angestellt; dabei wurden die dichtesten Gitterpackungen aller regulären, archimedischen und Catalan-Polytope bestimmt.

Um ein analoges Verfahren in Dimension 4 zu entwickeln, müßte zunächst eine Klassifikation analog zu Satz 4.4 durchgeführt werden. Dies sollte im Prinzip möglich sein, allerdings ist, wenn man das von Wolff in [30] bewiesene Analogon zu Satz 5.1 mit 6 Typen von kritischen Gittern betrachtet, die Menge der in Frage kommenden Punkte vermutlich deutlich größer. Zwar ist das Ergebnis von Wolff bereits ausreichend, um eine dichteste Gitterpackung für die 4-dimensionale Kugel zu bestimmen, aber bis zu einer zum Satz 5.6 analogen Aussage, die zentral für das hier entwickelte Verfahren für beliebige Polytope war, ist es noch ein weiter Weg. Für die Dimension 5 erscheint schon eine Klassifikation wie in Satz 4.4 wegen der hohen Anzahl von verschiedenen Gitteroktaedern als kaum mehr überschaubar.

Verwendete Notation

$\lvert\cdot\rvert$	absoluter Betrag von x
$\emptyset$	leere Menge
$A \subset B$	A (gegebenenfalls unechte) Teilmenge von B
$X \twoheadrightarrow Y$	surjektive Abbildung von X auf Y
$\mathrm{aff}\,(\cdot)$	affine Hülle
$\mathrm{card}\,(M)$	Kardinalität der Menge M
$\mathrm{conv}\,(\cdot)$	konvexe Hülle
$\mathfrak{CP}\,(v_1, \ldots, v_d)$	Kreuzpolytop, das von $v_1, \ldots, v_d$ aufgespannt wird
∂M	Rand der Menge M
$\Delta(\mathrm{K})$	kritische Determinante des konvexen Körpers K
$\det$	Determinante
$\mathrm{diam}\,(M)$	Durchmesser der Menge M (Supremum der Abstände)
$\mathrm{dist}\,(\cdot,\cdot)$	euklidischer Abstand
$\mathcal{D}\mathrm{K}$	Differenzkörper des konvexen Körpers K
$F_{\mathrm{K}}(\cdot)$	Distanzfunktion von $\mathrm{K} \in \mathfrak{K}^d$; K wird ggf. unterdrückt
$F_{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_d)$	$F_{\mathrm{K}}\big((x_1, \ldots, x_d)^{\intercal}\big)$
$F_{\mathrm{K}}^{V}(x_1, \ldots, x_d)$	$F_{\mathrm{K}}\Big(\big(V \cdot (x_1, \ldots, x_d)\big)^{\intercal}\Big)$
$F(x_1, \ldots, x_d)$	$F_{\mathrm{K}}^{U}(x_1, \ldots, x_d)$ für unimodulares U, bei fixiertem K
$\mathrm{grad}\,(\cdot)$	Gradient
$\mathrm{int}\,(M)$	das Innere der Menge M
$\mathfrak{K}^d$	Raum der konvexen Körper im $\mathbb{R}^d$
$\mathfrak{K}_0^d$	Raum der zentralsymmetrischen konvexen Körper im $\mathbb{R}^d$
$\mathrm{lin}\,(\cdot)$	lineare Hülle über $\mathbb{R}$
$\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,(M)$	lineare Hülle von M über $\mathbb{R}$
$\underset{M}{\mathrm{minarg}}\,(R[\cdot])$	$x \in \underset{a \in M}{\mathrm{minarg}}\,(R[\cdot]) :\Leftrightarrow \Big(x \in M \wedge P[x] = \min_{a \in M}(P[a])\Big)$
$M^{\perp}$	orthogonales Komplement von M
$\mathrm{rang}\,(A)$	Rang der Matrix A
$\mathrm{relint}\,(M)$	das relativ Innere der Menge M
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}^d$	d-dimensionaler euklidischer Raum

$\operatorname{sign}(\pi)$	Signum der Permutation π
$\mathfrak{S}_n$	Symmetrische Gruppe mit n Elementen
$\operatorname{Vol}(\cdot)$	Lebesgue'sches Volumen einer Menge
w_V	$V \cdot w$ für $w \in \mathbb{R}^d$ und eine Basis V des $\mathbb{R}^d$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_{\geq 0}$	Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}^d$	das Standardgitter in $\mathbb{R}^d$

Literaturverzeichnis

[1] BLICHFELDT, H.F.: *The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables.* Mathematische Zeitung, 39:1–15, 1934.

[2] BRUNNGRABER, ERNA: *Über Punktgitter.* Dissertation, Universität Wien, 1944.

[3] CHALK, J.H.H.: *On the frustrum of a sphere.* Annals Math., 52:199–216, 1950.

[4] CHALK, J.H.H. and C.A. ROGERS: *The critical determinant of a convex cylinder.* Journal London Mathematical Society, 23:178–187, 1948. Corrigendum, ibid. **24**, 240 (1949).

[5] CONWAY, J.H. and N.J.A. SLOANE: *Sphere Packings, Lattices and Groups.* Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1993.

[6] EWALD, GÜNTER: *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*, volume 168 of *Graduate texts in mathematics.* Springer-Verlag New York, 1996.

[7] FEJES TÓTH, G. and W. KUPERBERG: *Packing and covering with convex sets.* In GRUBER, P.M. and J.M. WILLS (editors): *Handbook of Convex Geometry*, pages 799–860. North-Holland, Amsterdam, 1993.

[8] FEJES TÓTH, L.: *On the arrangement of houses in a housing estate.* Studia Sci. Math. Hungar., 2:37–42, 1967.

[9] FEJES TÓTH, L.: *Densest packings of lenses (hungarian).* Math. Lapok, 22:209–213, 1971,1972.

[10] GAUSS, C.F.: *Recursion der „Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen von Ludwig August Seeber, Dr. der Philosophie, ordentl. Professor an der Universität in Freiburg, 1831“.* J. reine angew. Math., 20:312–20, 1840.

[11] GRUBER, P.M. and C.G. LEKKERKERKER: *Geometry of Numbers.* North-Holland mathematical library; v. 37. Elsevier Science Publishers B.V., second edition, 1987.

[12] HALES, THOMAS C.: *A series of articles proving the Kepler Conjecture.* math.MG/9811071 and following in the xxx mathematics archives, 1998.

[13] HANCOCK, HARRIS: *Development of the Minkowski Geometry of Numbers.* Macmillan Company, 1939.

[14] HENK, M. and U. BETKE: *Algorithmic computation of densest lattice packings for 3–polytopes.* unpublished.

[15] HOYLMAN, D.J.: *The densest lattice packing of tetrahedra.* Bulletin of the American Mathematical Society, 76:135–137, 1970.

[16] KORKINE, A. and G. ZOLOTAREFF: *Sur les formes quadratiques positives quaternaires.* Mathematische Annalen, 5:581–583, 1872.

[17] KORKINE, A. and G. ZOLOTAREFF: *Sur les formes quadratiques positives.* Mathematische Annalen, 11:242–292, 1877.

[18] LAGRANGE, J.L.: *Recherches d'arithmétique.* Nouveaux Mémoires de l'Académie royal des Sciences et Belle-Lettres de Berlin, pages 265–312, 1733. Oeuvres III, 693–758.

[19] LAUB, JOSEF: *Über Punktgitter.* Dissertation, TH Carolo Wilhelmina zu Braunschweig, 1946.

[20] MINKOWSKI, H.: *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper.* In: HILBERT, DAVID (Herausgeber): *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski*, Band II, Seiten 3–42. Leipzig, 1911.

[21] MORDELL, L.J.: *Lattice octahedra.* Canadian Journal of Mathematics, 12:297–302, 1960.

[22] MOUNT, D.M. and R. SILVERMAN: *Packing and covering the plane with translates of a convex polygon.* Journal of Algorithms, 11:564–580, 1990.

[23] ROGERS, C.A.: *Packing and covering.* Cambridge University Press, 1964.

[24] ROGERS, C.A. and G.C. SHEPHARD: *The difference body of a convex body.* Arch. Math., 8:220–233, 1957.

[25] SCHÜTTE, K. und B.L. VAN DER WAERDEN: *Das Problem der dreizehn Kugeln.* Math. Annalen, 125:325–334, 1953.

[26] SWINNERTON-DYER, H.P.F.: *Extremal lattices of convex bodies.* Volume 49 of *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Mathematical Section*, pages 161–162. Cambridge University Press, 1953.

[27] WESSELS, UWE: *Die Sätze von White und Mordell über kritische Gitter von Polytopen in den Dimensionen 4 und 5.* Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 1989.

[28] WHITWORTH, J. V.: *On the densest packing of sections of a cube.* Annali di Mathematica Pura ed Applicata, Bologna, 4(27):29–37, 1948.

[29] WHITWORTH, J. V.: *The critical lattices of the double cone.* In *Proceedings of the London Mathematical Society*, volume 53 of series 2, pages 422–443. 1951.

[30] WOLFF, KARL H.: *Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum (R_4).* Monatshefte für Mathematik, 58:38–56, 1954.

[31] WOODS, A.C.: *The critical determinant of a spherical cylinder.* Journal of the London Mathematical Society, 33:357–368, 1958.

[32] YEH, Y.: *Lattice points in a cylinder over a convex domain.* Journal London Mathematical Society, 23:188–195, 1948.