Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II - Diskrete Optimierung
Sommersemester 2013

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Antje Lehmann

Übungsblatt 12

Abgabetermin: 03.07.2013 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 35. **5+2 Punkte**

Betrachtet das Problem

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Zeigt das der zentrale Pfad wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned} x_1(\mu) &= \frac{1 + 3\mu - \sqrt{1 + 9\mu^2 - 2\mu}}{4}, \\ x_2(\mu) &= x_1(\mu), \\ x_3(\mu) &= 1 - 2x_1(\mu). \end{aligned}$$

b) Zeigt, dass

$$\lim_{\mu \to 0} (x_1(\mu), x_2(\mu), x_2(\mu))$$

gegen das eindeutige minimum konvergiert.

Aufgabe 36. **2+2+5+2+2 Punkte**

Betrachtet das folgende Mengenpartitionsproblem: Gegeben sei eine m-elementige Menge $S = \{e_1, \ldots, e_m\}$ und eine Menge $\mathcal{M} = M_1, \ldots, M_n$ von Teilmengen von S. Jeder Menge M_i sind Kosten $c_i \geq 0$ zugeordnet. Gesucht ist eine Partition der Menge S durch Mengen aus $\mathcal{M}$ mit minimalen Kosten. Es seinen Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und $d_1^{(i)}, d_2^{(i)}, \ldots, d_n^{(i)}$, für $1 \leq i \leq m$ durch folgende Rekursion bestimmt:

$$\begin{aligned} d_j^{(1)} &= c_j & & 1 \leq j \leq n \\ u_1 &= \min\{c_j \mid a_{1j} = 1\} & & \\ d_j^{(i+1)} &= \begin{cases} d_j^{(i)} - u_i & \text{falls} \quad a_{ij} = 1 \\ d_j^{(i)} & \text{sonst} \end{cases} & & 1 \leq j \leq n \\ u_{i+1} &= \min\{d_j^{(i+1)} \mid a_{i+1,j} = 1\}. & & \end{aligned}$$

a) Formuliert das Partitionsproblem als ganzzahliges lineares Programm. Verwendet hierbei eine Element-Mengen-Inzidenzmatrix A für die Elemente S und die Mengen $\mathcal{M}$ und führt für jede Menge $M_i \in \mathcal{M}$ eine Variable $x_i \in \{0, 1\}$ ein.

b) Gebt eine Interpretation der Werte u_i und $d_j^{(i)}$ an.

c) Beweist, dass $\sum_{i=1}^{m} u_i$ eine untere Schranke für das Partitionsproblem angibt. (Tipp: Zeigt, dass u einen dual zulässigen Punkt angibt. Beweist dafür, dass für alle k und alle j folgende Abschätzung gilt $\sum_{i+1}^{k+1} a_{ij} u_i \leq \sum_{i=1}^{k-1} a_{ij} u_i + d_j^{(k)}$.)

d) Wendet diese Methode zur Bestimmung einer unteren Schranke auf das Partitionsproblem mit folgendem Kostenvektor c und Element-Mengen-Inzidenzmatrix an:

$$c^T = (3 \quad 7 \quad 8 \quad 5 \quad 10 \quad 4 \quad 6 \quad 9)$$

$A =$

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8
e_1	1	1	0	0	0	0	0	0
e_2	0	0	1	1	1	0	0	0
e_3	0	0	0	0	1	1	1	0
e_4	0	0	0	0	0	0	1	1
e_5	0	1	1	0	0	1	0	0

e) Kann man im Beispiel von Aufgabenteil d) durch Vertauschen der Zeilen der Matrix A eine bessere untere Schranke erhalten? Gebt eine entsprechende bessere Permutation der Zeilen zusammen mit der damit erhaltenen besseren unteren Schranke an oder beweist, dass mit dieser Methode keine bessere untere Schranke gefunden werden kann.

Aufgabe 37. **5+5 Punkte**

1. Denkt euch eine Übungsaufgabe zu dem bisher in der Vorlesung behandelten Themen aus. Die Aufgabe sollte interessant, lehrreich und nicht trivial sein. Es sind sowohl praktische (Modellierung etc.) als auch theoretische Probleme zugelassen.

2. Gebt eine Lösung für eure Aufgabe an.

Dies ist das letzte Übungsblatt der Vorlesung.

Wir wünschen alle Teilnehmern der Vorlesung viel Spaß und Erfolg im weiteren Studium

Fragen: klug@zib.de