TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK

ADM I - Einführung in die Lineare und Kombinatorische Optimierung
Wintersemester 14/15

Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Martin Grötschel
Dr. Axel Werner
Torsten Klug
Benedikt Bodendorf

12. Übungsblatt

Abgabetermin: 23.01.2015 bis 14:15 in MA041

Aufgabe 45. **4 Punkte**

Löst das folgende lineare Programm mit dem Simplex-Algorithmus (Phase I und Phase II)

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 20 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 20 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \geq & 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe 46. **4 Punkte**

Beweist den folgenden Satz aus der Vorlesung.

Seien A eine (m,n)-Matrix, $b \in \mathbb{K}^m$, $j \in \{1,\dots,n\}$ und I, J eine Partition der Zeilenindexmenge $M = \{1,\dots,m\}$. Seien $D \in \mathbb{K}^{r\times n}$, $d \in \mathbb{K}^r$ die durch Fourier-Motzkin-Elimination der Variablen j gewonnene Matrix bzw. Vektor.

Sei $r := |Z \cup (N \times P)|, R := \{1,\dots,r\}$ und $p : R \to Z \cup (N \times P)$ eine Bijektion (d. h. eine kanonische Indizierung der Elemente von $Z \cup (N \times P)$).

Setze $E := p^{-1}((Z \cap I) \cup ((N \times P) \cap (I \times I)))$, $F := R \setminus E$, dann gilt: Das System

$$A_{I.}x \leq b_I, A_{J.}x < b_J$$

hat eine Lösung genau dann, wenn das System

$$D_{E.}x \leq d_E, D_{F.}x < d_F$$

eine Lösung hat.

Aufgabe 47. **6 Punkte**

Ihr habt eine Tüte mit 100 Gummibärchen und sollt sie unter einer Kindergartengruppe verteilen. Die kleine Gruppe besteht aus Egon, Lisa, Tom und Ina. Egon argumentiert, dass er doppelt so alt ist wie Lisa und ihm deshalb mindestens doppelt so viele Gummibärchen zustehen wie ihr. Darauf meldet sich lautstark Tom und will mehr als jeder andere haben, da er ja der Größte in der Gruppe ist. Lisa und Ina teilen sich ihre Gummibärchen, wollen aber zusammen mindestens ein Gummibärchen mehr haben als Tom. Jedes Kind soll mindestens 10 Gummibärchen bekommen. Es muss nicht die ganze Tüte ausgeteilt werden, wenn ihr die Gummibärchen geschickt verteilt, bleiben vielleicht auch noch ein paar für euch übrig.

Wie müsst ihr die Gummibärchen verteilen, dass alle Kinder zufrieden sind und ihr möglichst viele übrig behaltet?

a) Formuliert das Problem als lineares Programm.

b) Versucht mit der Fourier-Motzkin-Elimination das LP zu lösen. Nach der Eliminierung von zwei Variablen dürft ihr euch entscheiden, ob ihr weiter die Fourier-Motzkin-Elimination benutzen wollt. Andernfalls sucht euch geeignete Werkzeuge/Software, um eine Lösung zu berechnen. Gebt eine optimale Lösung an und einen Beweis für die Optimalität eurer Lösung, zum Beispiel das Tableau zu einer optimal zulässigen Basislösung.

Aufgabe 48. **6 + (3 Extra) Punkte**

In einer Vorlesung sollen für eine Programmieraufgabe Probleminstanzen an die Übungsgruppen verteilt werden. Für jede Gruppe wird dazu ein Kürzel definiert, das die Anfangsbuchstaben der Nachnamen umfasst. Zum Beispiel lautet das Kürzel für die Gruppe Fischer, Meyer, Schulze: FMS. Jeder Probleminstanz werden nun Buchstaben zugeordnet und dementsprechend den Gruppen zugewiesen. Wurden einer Instanz zum Beispiel die Buchstaben A und L zugeordnet, so erhalten alle Gruppen, die ein A oder ein L in ihrem Kürzel haben, diese Instanz. Jede Gruppe erhält somit genau so viel Instanzen wie sie Gruppenmitglieder hat.

Gesucht ist die minimale Anzahl von Instanzen, so dass eine Zuordnung von Buchstaben zu den Instanzen existiert und gilt:

- keine Gruppe erhält die gleiche Instanz mehrfach,
- die zugewiesenen Instanzen von jeweils 2 Gruppen unterscheidet sich mindesten in einer Instanz.

a) Formuliert die Problemstellung als lineares oder ganzzahliges Programm. Ihr dürft annehmen, dass in einem Kürzel kein Buchstabe mehrfach vorkommt, d.h. MMF wäre nicht zulässig.

b) (**Optional**) Löst das Problem für die Gruppenliste: WRK, R, SN, VWF, LOF, SFR, AJV, TBD, EHP, ERN, STZ, TID, PWR, OBG, ASP, HEG.

Programmieraufgabe

Die Problemdaten der Programmieraufgabe wurden Aktualisierung. Ihr könnt nun davon ausgehen, dass die Nachfrage negativ und das Angebot positiv ist.

Abstimmung zum Klausurtermin!

Zur Wahl steht der 11.2.2015 10-12 Uhr und der 12.2.2015 von 16-18 Uhr. Um Abzustimmen schreibt bitte bis nächsten Mittwoch, den 21.1.2015, um 23:59:59 eine E-Mail an klug@zib.de. Schreibt in die Betreffzeile der E-Mail "Klausurtermin 11.2", wenn ihr für den Klausurtermin am 11.2.2015 seit und "Klausurtermin 12.2", wenn ihr für den Klausurtermin am 12.2 stimmen möchtet. Wenn ihr keine der beiden Varianten bevorzugt, schreibt keine E-Mail.

Fragen: klug@zib.de