Technische Universität Berlin
Fachbereich 3
Prof. M. Grötschel/N. Kamin WS 1994/95

Kombinatorische Optimierung
13. Übungsblatt

49. Aufgabe **(5 Punkte)**

Betrachten Sie die LP-Relaxierung des 0/1-Knapsack-Problems

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & a^T x \le b \\ & 0 \le x \le \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{KLP}$$

Wie üblich gelte $\frac{c_1}{a_1} \ge \frac{c_2}{a_2} \ge \cdots \ge \frac{c_n}{a_n}$, und das **kritische Element** s sei definiert als

$$s := \min \{ i : \sum_{j=1}^{i} a_j > b \}.$$

Zeigen Sie: Die Optimallösung x^* von (KLP) ist

$$x_i^* = \begin{cases} 1, & i < s \\ \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} a_i}{a_s} & i = s \\ 0, & i > s. \end{cases}$$

50. Aufgabe **(5 Punkte)**

Gegeben sei ein asymmetrisches Travelling-Salesman-Problem im vollständigen Digraphen $D_n = (V, A)$ mit Bogengewichten c_{ij}.
Berechnen Sie für das folgende Beispiel mit $V = \{1, \ldots, 5\}$ und Bogengewichtsmatrix

	1	2	3	4	5
1	$*$	7	4	3	5
2	3	$*$	2	5	1
3	6	2	$*$	8	4
4	9	2	1	$*$	3
5	4	2	1	7	$*$

eine optimale Tour mit Hilfe des Branch&Bound-Verfahrens. Dabei sollen Sie folgende Strategien benutzen:

(a) **Separationsstrategie:**

- Man nehme denjenigen Bogen (i, j) mit dem kleinsten Gewicht.
- Man teile das Problem jeweils in zwei Teilprobleme: eines, bei dem der Bogen (i, j) zur Tour gehört, und eines, bei dem dieser Bogen nicht zur Tour gehört.

(b) **Lower-Bounding-Strategie:**

Man berechne als untere Schranke in der Bogengewichtsmatrix

$$lb = \sum_{k=1}^{n} \min_{l}\{c_{kl}\},$$

wobei in dem Teilproblem, bei dem der Bogen (i,j) in der Tour enthalten ist, die Zeile i und die Spalte j der Matrix mit Ausnahme des Eintrags c_{ij} zu streichen sind, ebenso wie alle Bögen, die Subtouren erzeugen würden. Bei dem anderen Teilproblem streiche man nur den Bogen (i,j).

(c) **Branching-Strategie:**

Depth-First-Search jeweils in dem Teilbaum, dessen zugehöriges Teilproblem den Bogen (i,j) enthält.

51. Aufgabe **(5 Punkte)**

Geben Sie einen Branch&Bound-Algorithmus für das Problem an, in einem ungerichteten Graphen eine Clique maximaler Kardinalität zu finden. Führen Sie Ihren Algorithmus anhand eines kleinen Beispiels vor.

52. Aufgabe **(5 Punkte)**

Das (gerichtete bzw. ungerichtete) **Chinesische Postbotenproblem** ist die Aufgabe, in einem stark zusammenhängenden Digraphen bzw. zusammenhängenden Graphen eine Postbotentour minimaler Länge zu finden. Formulieren Sie sowohl das gerichtete als auch das ungerichtete Chinesische Postbotenproblem als lineares ganzzahliges Programm.

Abgabe: 2.2.1995 VOR Beginn der großen Übung