Technische Universität Berlin
Fachbereich 3
Prof. M. Grötschel/N. Kamin WS 1994/95

Kombinatorische Optimierung
5. Übungsblatt

17. Aufgabe **(5 Punkte)**
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph auf n Knoten. Alle maximal unabhängigen Mengen im Unabhängigkeitssystem

$$\mathcal{I} = \{\, I \subseteq E : I \subseteq T \text{ Tour} \,\}$$

haben die gleiche Kardinalität n. $(E, \mathcal{I})$ ist deshalb ein Matroid.

(b) Sei $r : 2^E \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

(1) $r(F) \le |F| \qquad \forall F \subseteq E$
(2) $F \subseteq G \Longrightarrow r(F) \le r(G) \qquad \forall F, G \subseteq E$
(3) $r(F) \le r(F_1) + r(F_2) \qquad \forall F_1 \,\dot\cup\, F_2 = F \subseteq E$

Dann ist r die Rangfunktion eines Unabhängigkeitssystems.

18. Aufgabe **(5 Punkte)**
Zwei Matroide $(E, \mathcal{I})$ und $(F, \mathcal{J})$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : E \to F$ mit der Eigenschaft

$$\phi(G) \in \mathcal{J} \iff G \in \mathcal{I}$$

gibt.
Zeigen Sie, daß jedes graphisches Matroid isomorph zu einem Matrixmatroid über dem zweielementigen Körper $GF(2)$ ist.

19. Aufgabe **(5 Punkte)**
Sei $\mathcal{B}$ das Basis-System eines Matroids M auf einer Grundmenge E.
Zeigen Sie, daß der Greedy-Max-Algorithmus das folgende Bottleneck-Problem für $c > 0$ optimal löst:

$$\max_{B \in \mathcal{B}} \min_{i \in B} c(i).$$

20. Aufgabe **(5 Punkte)**
Für das Problem, gegebene DM-Beträge mit möglichst wenigen Münzen und Scheinen auszuzahlen, wird der Greedy-Algorithmus angewendet, der für den jeweils zu zahlenden Restbetrag immer die größtmögliche Münze bzw. den größtmöglichen Schein auszahlt und dann iteriert.

(a) Zeigen Sie, daß der Greedy-Algorithmus optimal arbeitet.

(b) Gilt dies immer noch, wenn zusätzlich 30-Pfennig-Münzen bzw. 40-Pfennig-Münzen eingeführt würden?

Abgabe: 24.11.1994 VOR Beginn der großen Übung