Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

10. Übungsblatt

Abgabetermin: 22. Juni 1992 in der Übung

Beachten Sie bitte die Ergänzungen zur Aufgabe 34, die Sie in einer e-mail auf Ihrem account im Workstationpool finden.

38. Aufgabe **2+2+2+2 Punkte**
y^1, y^2 seien zwei Variablen. Formulieren Sie, falls möglich, folgende Forderungen durch lineare Ungleichungen

i) $x^1 \leq \min(y^1, y^2)$

ii) $x^2 \geq \max(y^1, y^2)$

iii) $x^3 \leq \max(y^1, y^2)$

iv) $x^4 \geq \min(y^1, y^2)$

Geben Sie eine Begründung, warum dies in manchen Fällen nicht möglich ist.

39. Aufgabe **10 Punkte**
Man betrachte die Behandlung des Problems

$$\begin{array}{rll} \max \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & & \\ \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j\right) + x_i & \leq 100^{i-1} & (i = 1, 2 \ldots, n) \\ x_j & \geq 0 & (j = 1, 2 \ldots, n) \end{array}$$

durch das Simplexverfahren. Die Schlupfvariablen seien mit $s_1, \ldots, s_n$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß in jeder zulässigen Basis genau eine der Variablen x_j und s_j enthalten ist.

40. Aufgabe **3+3+3+3 Punkte**
Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 39 und Induktion über n, daß mit der "Steilster-Anstieg-Regel" die Tableaux die folgenden Eigenschaften haben:

i) Nach $2^{n-1} - 1$ Iterationen sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten gegeben durch

$$c^T x = 10\left(100^{n-2} - \sum_{j=1}^{n-2} 10^{n-1-j} x_j - s_{n-1}\right) + x_n.$$

ii) Nach 2^{n-1} Iterationen sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten gegeben durch

$$c^T x = 90 \cdot 100^{n-2} + 10\Big(\sum_{j=1}^{n-2} 10^{n-1-j} x_j + s_{n-1}\Big) - s_n.$$

iii) Nach $2^n - 1$ Iterationen sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten gegeben durch

$$c^T x = 100^{n-1} - \sum_{j=1}^{n-1} 10^{n-j} x_j - s_n.$$

iv) In jeder Iteration sind die reduzierten Kosten-Koeffizienten ganzzahlig.

41. Aufgabe **5+5 Punkte**

Gegeben sei ein Polytop $P = P^{=}(A, b)$ und eine Ecke v von P. Zeigen Sie, wie mit Hilfe von Pivotoperationen alle Ecken von P bestimmt werden können. Zeigen Sie, daß $P = P^{=}(A, b)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & 1 & & 1 & \\ & 1 & 1 & 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Polytop ist, daß $(0, \mathbb{1})^T$ eine Ecke von P ist und bestimmen Sie mit Hilfe von Pivotoperationen alle anderen Ecken.