Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

11. Übungsblatt

Abgabetermin: 29. Juni 1992 in der Übung

42. Aufgabe **10 Punkte**

Betrachten Sie das lineare Programm in Standardform und das gleiche Programm, ergänzt um künstliche Variablen

$$\begin{array}{rl} \max c^T & x \\ A & x = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (1) \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rl} \max c^T & x \\ A & x + Iy = b \\ & x, y \geq 0 \end{array} \qquad (1+)$$

wobei oBdA $b \geq 0$ gelte. Phase I des Simplexalgorithmus sei erfolgreich auf (1) angewandt worden, B sei die gefundene Basis. Zeigen Sie, daß die Anwendung der Phase II des Simplexalgorithmus auf (1+) mit der Startbasis B eine Optimallösung für (1) und (1+) mit der zusätzlichen Bedingung $y = 0$ liefert, wenn folgende Regeln beachtet werden:

i) Die zu künstlichen Variablen gehörigen Spalten von (A, I) werden bei der Bestimmung der Pivotspalte und der reduzierten Kosten niemals berücksichtigt.

ii) Ist für einen Pivotschritt die s-te Spalte die Pivotspalte, ist die r-te Basisvariable künstlich und gilt $\overline{a}_{rs} \neq 0$, so werde die r-te Zeile als Pivotzeile gewählt.

iii) Ist (x, y) die bei Anwendung der Regeln i) und ii) gefundene Optimallösung von (1+) mit der zusätzlichen Bedingung $y = 0$, so ist x eine Optimallösung von (1).

43. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das folgende lineare Programm mit dem revidierten Simplexalgorithmus (Phase I und II):

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcl} \min & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & - & 5x_6 & & \\ \text{s.t.} & 6x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 4 \\ & 2x_1 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & & & = & 3 \\ & 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & x_6 & = & 2 \\ & & & & & & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, \; x_6 & \geq & 0 \end{array}$$

44. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das folgende lineare Programm unter Verwendung der Upper-Bound-Technik:

$$\begin{array}{rrcl} \min & x_1 + x_2 - x_3 & & \\ & x_1 - 4x_2 + 3x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 1 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq & 8 \\ & 0 \leq x_1 & \leq & 2 \\ & 0 \leq x_2 & \leq & 1 \\ & 0 \leq x_3 & \leq & 3 \end{array}$$

45. Aufgabe **2+2+3+3+3 Punkte**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

i) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j x^j$ ein Polynom. Ist p nicht Null, so existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $0 < x < \delta$ die Zahl $p(x)$ verschieden von Null ist.

ii) Betrachten Sie die beiden linearen Programme in Standardform (d.h. insbesondere rang $A = m$)

$$\begin{array}{rl} \max c^T & x \\ A & x = b \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (2) \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rl} \max c^T & x \\ A & x = b + A(\epsilon^i)_{i=1,\ldots,n} \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad (2\epsilon)$$

Besitzt (2) eine zulässige Lösung, so für jedes $\epsilon > 0$ auch (2ϵ).

iii) Es existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $0 < \epsilon < \delta$ jede zulässige Basislösung von (2ϵ) nichtdegeneriert ist.

iv) Es existiert ein $\delta > 0$, so daß für jedes $0 < \epsilon < \delta$ jede zulässige Basis von (2ϵ) eine zulässige Basis von (2) ist.

v) Betrachten Sie die Anwendung des Simplexalgorithmus auf (2ϵ) für hinreichend kleines ϵ. Die die Basis verlassende Spalte von A ist in jedem Pivotschritt eindeutig bestimmt.

vi) Betrachten Sie nun zusätzlich die Anwendung des Simplexalgorithmus auf (2), wobei für die Zeilenauswahl die erste lexikographische Regel verwendet werde. Wird bei der Anwendung des Simplexalgorithmus auf beide lineare Programme jeweils die gleiche Pivotspalte ausgewählt, so sind nach jedem Pivotschritt die Basen gleich.

Bemerkung: 3 der 13 Punkte dieser Aufgabe sind als Zusatzpunkte zu verstehen.