Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

12. Übungsblatt

Abgabetermin: 6. Juli 1992 in der Übung

46. Aufgabe **2+2+2+2+2 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Kreiselt das Simplexverfahren, so tritt eine degenerierte Basislösung wiederholt auf.

ii) Sei eine optimale Basislösung eines linearen Programms in Standardform gegeben. Erhöht man eine der Nichtbasisvariablen und paßt die Basisvariablen entsprechend an, so vermindert sich der Zielfunktionswert.

iii) Ist für eine Basislösung eines linearen Programms in Standardform ein Koeffizient der reduzierten Kosten positiv, so ist die Basislösung nicht optimal.

iv) Jedes unlösbare Ungleichungssystem in n Variablen enthält ein inkonsistentes Subsystem von $n+1$ Ungleichungen.

v) Ist in einer Optimallösung eines linearen Programms

$$\begin{aligned} \max c^T x & \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

eine Variable x_j positiv, so muß die entsprechende Ungleichung des dualen Programms für jede Optimallösung desselben straff sein.

47. Aufgabe **10 Punkte**

Lösen Sie das folgende lineare Programm mit dem dualen Simplexalgorithmus:

$$\begin{aligned} \min \quad x_1 + 2x_2 & \\ x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_2 &\geq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

48. Aufgabe **10 Punkte**

Eine Möbelfabrik stellt Regale, Schreibtische, Stühle und Betten her. Zur Herstellung einer Produkteinheit sind 3, 2, 1, bzw. 2 Arbeitsstunden, 4, 3, 3, bzw. 4 Einheiten Holz und jeweils eine Einheit Metall erforderlich. Es stehen 225 Arbeitsstunden, 117 Einheiten Metall und 420 Einheiten Holz zur Verfügung. Der Gewinn des Herstellers beträgt 19 DM pro Regal, 13 DM pro Schreibtisch, 12 DM pro Stuhl und 17 DM pro Bett.

a) Bestimmen Sie einen optimalen Produktionsplan.

b) Bestimmen Sie mit den Methoden der Sensitivitätsanalyse einen optimalen Produktionsplan, falls zusätzlich eine der folgenden nderungen berücksichtigt werden soll.

   i) Der Gewinn pro Schreibtisch erhöht sich von 13 DM auf 15 DM.

   ii) Der zur Verfügung stehende Vorrat an Metall erhöht sich von 117 auf 125 Einheiten.

   iii) Es werden zusätzlich noch Tische hergestellt, die mit einem Gewinn von 14 DM verkauft werden können. Zur Herstellung eines Tisches werden 3 Arbeitsstunden, 1 Einheit Metall und 2 Einheiten Holz benötigt.

   iv) Es sollen höchstens fünfmal so viele Stühle wie Schreibtische hergestellt werden.

   v) Zur Herstellung eines Stuhls werden 4 statt 3 Einheiten Holz benötigt.

49. Aufgabe **2+2+2+2+2 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie:

i) Zwei Ecken x_1 und x_2 eines Polyeders $P(A, b)$ liegen genau dann auf einer gemeinsamen Kante, wenn es eine lineare Zielfunktion $c^T x$ gibt, so daß x_1 und x_2 die einzigen optimalen Ecken von $\max c^T x,\ Ax \le b$ sind.

ii) Für ein Polyeder $P(A, b)$ induziert jede Ungleichung, die nicht imlizit mit Gleichheit erfüllt ist, eine Facette.

iii) Gilt für zwei Seitenflächen E und F eines Polyeders $E \subseteq F$ und $\dim E = \dim F$, so folgt $E = F$.

iv) Für ein Polyeder $P(A, b)$ folgt aus $\operatorname{eq} P \neq \emptyset$ stets $\operatorname{rang} A_{\operatorname{eq}(P)\cdot} < |\operatorname{eq} P|$.

v) Betrachten Sie die Ungleichungssysteme

$$\begin{aligned} Ax &\le a \\ Bx &\le b \\ Cx &= c \end{aligned} \quad (1) \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} Ax &\le a \\ Bx &= b \\ Cx &= c. \end{aligned} \quad (2)$$

Ist (1) irredundant, so auch (2).

Viel Erfolg im weiteren Studium wünschen Ihnen

J. Kaminski
R. Borndörfer
M. Grötschel