Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

2. Übungsblatt

Abgabetermin: 27. April 1992 in der Übung

6. Aufgabe **5+5 Punkte**

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kegel. Eine Menge $S \subseteq C$ heißt *Erzeugendensystem* für C, falls $\operatorname{cone}(S) = C$. Ist S minimal (bzgl. Mengeninklusion), so heißt S *Kegelbasis*.

a) Geben Sie zwei Kegelbasen des $\mathbb{R}^2$ unterschiedlicher Kardinalität an.

b) Gibt es im $\mathbb{R}^n$ Kegel mit Kegelbasen unendlicher Kardinalität?

7. Aufgabe **10+2 Punkte**

Beweisen Sie den folgenden Satz: *Es seien $A \in \mathbb{R}^{(m,n)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. $D \in \mathbb{R}^{(r,n)}$ und $d \in \mathbb{R}^r$ seien durch Fourier-Motzkin-Elimination der j-ten Variablen im Ungleichungssystem $Ax \le b$ berechnet worden. Es seien ferner $I, J \subseteq M = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = M$, und $E \cup F = R = \{1, 2, \ldots, r\}$ definiere eine Partition der Zeilenindexmenge von D wie folgt:*

$$E := p^{-1}((Z \cap I) \cup ((N \times P) \cap (I \times I)),$$

$$F := R \setminus E.$$

Dann hat das System

$$A_{I\cdot}x \le b_I \ , \quad A_{J\cdot}x < b_J$$

eine Lösung genau dann, wenn das System

$$D_{E\cdot}x \le d_E \ , \quad D_{F\cdot}x < d_F$$

eine Lösung hat.

Zusatzaufgabe: Obige Aufgabe beschreibt die Fourier-Motzkin-Elimination in Ungleichungssystemen mit gewöhnlichen und strikten Ungleichungen. Was passiert, wenn zusätzlich auch noch Gleichungen auftreten?

8. Aufgabe **Pflicht**

a) Erfinden Sie ein Verfahren, daß bei Anwendung von Fourier-Motzkin-Elimination die entstehenden Ungleichungssysteme durch Elimination überflüssiger Ungleichungen reduziert.

b) Programmieren Sie das Verfahren von Fourier-Motzkin zur Elimination von Variablen in einem Ungleichungssystem der Form $Ax \le b$. Ihr Programm soll sukzessive eine durch eine Liste gegebene Teilmenge von Variablen eliminieren und die hierbei entstehenden Ungleichungssysteme ausgeben. Versuchen Sie, diese Systeme mittels Ihres bei a) entwickelten Verfahrens zu reduzieren.

Abgabetermin für diese Aufgabe: 11.5.92

9. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang und $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | Bx = 0 \right\}$, dann ist für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ der Vektor

$$\overline{x} := \left(I - B^T \left(BB^T\right)^{-1} B\right) x$$

die orthogonale Projektion auf L.