Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 4. Mai 1992 in der Übung

10. Aufgabe **2+3+3+2 Punkte**

Beweisen Sie die folgenden Alternativsätze:

a) $(\exists x : Ax = c) \ \dot\vee \ (\exists y : A^T y = 0, c^T y = 1)$

b) $(\exists x : Ax \leq c, Ax \neq c)$

$$\dot\vee \ \left[\exists y : (A^T y = 0, c^T y = -1, y \geq 0) \vee (A^T y = 0, c^T y \leq 0, y > 0)\right]$$

c) $(\exists x : Ax > 0, Cx \geq 0, Dx = 0)$

$$\dot\vee \ (\exists u, v, w : u, v \geq 0, u \neq 0, A^T u + C^T v + D^T w = 0)$$

d) $(\exists x : Ax \leq 0, x \neq 0) \ \dot\vee \ (\forall c : \exists y : y^T A = c, y \geq 0)$

11. Aufgabe **4+3+3 Punkte**

Formulieren Sie als lineares Programm:

a) Zu dem inkonsistenten Gleichungssystem

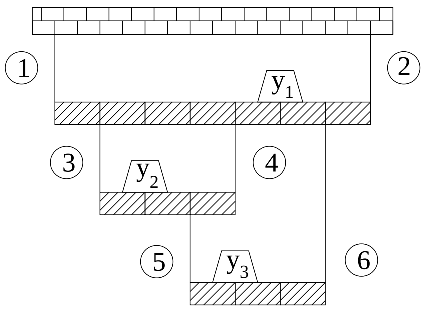
$$\begin{aligned} x - \ y &= 7 \\ 2x + 3y &= 5 \\ 3x + \ y &= -1 \end{aligned}$$

soll eine "Lösung" gefunden werden, die die Summe der Fehler $S = d_1 + d_2 + d_3$ minimiert, wobei

$$\begin{aligned} d_1 &= |\ x - \ y - 7|, \\ d_2 &= |2x + 3y - 5|, \\ d_3 &= |3x + \ y + 1|. \end{aligned}$$

b) Im vorigen Problem soll nun die Summe der Fehlerquadrate minimiert werden. (Hinweis: Ableiten.)

c) Betrachten Sie das folgende Hängegerüst:



Die Kabel 1 und 2 können je 300 kg Last, die Kabel 3 und 4 je 100 kg und die Kabel 5 und 6 jeweils 50 kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichtes der Kabel und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht für die Lasten y_1, y_2 und y_3 gefunden werden.

12. Aufgabe **5+5 Punkte**

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ Konvexkombination der Vektoren a^i, $i = 1, \ldots, m$. Beweisen Sie:

a) Für beliebiges $b \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$\|x - b\| \leq \max_{1 \leq i \leq m} \{\|a^i - b\|\}.$$

b) Für beliebiges $c \in \mathbb{R}^n$ gilt
$$c^T x \leq \max_{1 \leq i \leq m} \{c^T a^i\}.$$

13. Aufgabe **10 Punkte**

Betrachten Sie den folgenden Satz. **Schacher Trennsatz.** Seien $P = \{ x \in \mathbb{R}^n | Ax = a, Bx \leq b \}$ und $Q = \{ x \in \mathbb{R}^n | Cx = c, Dx \leq d \}$ zwei Polyeder, so daß keine der Ungleichungen $Bx \leq b$ bzw. $Dx \leq d$ von allen Punkten in P bzw. Q mit Gleichheit erfüllt wird. Es gibt eine P und Q trennende Hyperebene genau dann, wenn die Menge

$$R := \{ x \in \mathbb{R}^n | Ax = a, Cx = c, Bx < b, Dx < d \}$$

leer ist. $\square$

i) Zeigen Sie, daß der Satz in der obigen Form nicht richtig ist.

ii) Formulieren Sie den Satz richtig und beweisen Sie ihn.