Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 11. Mai 1992 in der Übung

14. Aufgabe **10 Punkte**
Ein Ivestor besitzt am Montag 100 DM. Jeden Tag hat er die folgende Investitionsmöglichkeit: Investiert er am betreffenden Tag x DM und am darauffolgenden Tag $2x$ DM, so erhält er am dritten Tag $4x$ DM zurück. Der Inbvestor sucht einen optimale Strategie, um am Samstag eine maximale Menge Geld zur Verfügung zu haben.
Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm (und diskutieren Sie Zusatzannahmen, die Sie möglicherweise treffen).

15. Aufgabe **3+3+4 Punkte**
Bestimmen Sie mit Hilfe von Fourier-Motzkin-Elimination Ungleichungssysteme, die die folgenden Polyeder vollständig beschreiben:

a) $\text{cone}(A)$

b) $\text{conv}(B)$

c) $\text{conv}(B) + \text{cone}(A)$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

16. Aufgabe **2+2+2+2+2+2+2+2 Punkte**
Zeigen Sie: Für S, $S_i \subseteq \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$ gilt:

a) $S_i \subseteq S_j \Rightarrow S_j^o \subseteq S_i^o$

b) $S \subseteq S^{oo}$

c) $(\bigcup_{i=1}^{k} S_i)^o = \bigcap_{i=1}^{k} S_i^o$

d) $S^o = \text{cone}(S^o) = (\text{cone}(S))^o$

e) $S = \text{lin}(S) \Rightarrow S^o = S^\perp$ (Gilt die Umkehrung?)

f) Sind die Behauptungen a) – d) auch wahr, wenn man "^{o}" durch "$^\perp$" ersetzt?

g) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $S^o = S^{ooo}$,

h) Für welche Mengen $S \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $S = S^o$?

17. Aufgabe **10 Punkte**

Formulieren und beweisen Sie den Satz vom starken komplementären Schlupf für das folgende Paar dualer linearer Programme:

$$\begin{array}{rrl} \max\ c^T x + d^T y & & \\ Ax & + By & \leq a \\ Cx & + Dy & = b \\ x & & \geq 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{lrl} \min\ u^T a & + v^T b & \\ u^T A & + v^T B & \geq c \\ u^T B & + v^T D & = d \\ u & & \geq 0 \end{array}$$