Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

6. Übungsblatt

Abgabetermin: 25. Mai 1992 in der Übung

22. Aufgabe **3+7 Punkte**

Eine Firma kann 30 Mio. investieren. Dieser Betrag kann auf drei Zweigwerke aufgeteilt werden. Um die Beschäftigung an den drei Stellen einigermaßen konstant zu halten, sollen mindestens 3 Mio. bei Stelle A, mindestens 5 Mio. bei B und mindestens 8 Mio. bei C investiert werden. Aufgrund von Marktbeschränkungen wäre es Unsinn, bei B mehr als 17 Mio. zu investieren.
Jedes Zweigwerk hat eine Auswahl verschiedener Projekte, die mit Investitionsmitteln beschickt werden können. Für jedes dieser Projekte ist die Rendite (jährlicher Gewinn pro Mio. Investition) und eine Obergrenze für die zugehörige Investition bekannt. Die Daten hierfür sind:

Zweigwerk	Projekt	Rendite	Obergrenze
A	A1	8%	6 Mio.
	A2	6%	5 Mio.
	A3	7%	9 Mio.
B	B1	5%	7 Mio.
	B2	8%	10 Mio.
	B3	9%	4 Mio.
C	C1	10%	6 Mio.
	C2	6%	3 Mio.

Wie sollen die 30 Mio. auf die Zweigwerke und von dort auf die Projekte verteilt werden, um maximalen Gewinn pro Jahr zu erzielen?

a) Formulieren Sie die Fragestellung als lineares Optimierungsproblem.

b) Nun erhalten Sie als Arbeitgeber eine erschreckende Information. Die Belegschaften der Werke A, B und C haben beschlossen, in einen einmonatigen Streik zu treten, wenn ihr eigenes Werk nicht mindestens so viele Investitionsmittel erhält wie jedes der beiden anderen.

   Wie fällen Sie die Entscheidung, wenn Sie den Gewinn für das nächste Jahr maximieren wollen?

   Das Problem lt sich so angehen, da man mehrere lineare Teilprobleme löst. Schlagen Sie einen möglichen Lösungsweg vor und formulieren Sie die dabei auftretenden linearen Teilprobleme.

23. Aufgabe **10 Punkte**

Sei Q Teilmenge eines Polyeders $P = P(A, b)$. Zeigen Sie, da $\mathrm{fa}\big(\mathrm{eq}(Q)\big)$ die bezglich Mengeninklusion kleinste Seitenflche ist, die Q enthlt.

24. Aufgabe **4+3+3 Punkte**

a) Zeigen Sie, da eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein Polyeder ist, wenn es endliche Teilmengen V, E und L des $\mathbb{R}^n$ mit $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E) + \text{lin}(L)$ gibt.

b) Bestimmen Sie eine solche Zerlegung für das Polyeder $P(A, b)$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Existiert das Maximum der Funktion $c^T x$ mit $c = (3, -2, -1)$ auf $P(a, b)$ (Keine Berechnung erforderlich.)?

25. Aufgabe **3+4+3 Punkte**

Sei $P = P(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder.

a) Jede minimale nichtleere Seitenfläche F von P ist ein affiner Raum. Insbesondere existiert eine Zeilenindexmenge I von A, so daß $F = \{x \in \mathbb{R}^n | A_{I.}x = b_I\}$ gilt.

b) Alle minimalen Seitenflächen von P haben dieselbe Dimension und sind von der Form $y + \text{lineal}(P)$ mit $y \in P$, d. h., sie sind parallel.

c) Zu jedem linearen Programm mit endlicher Optimallösung gibt es einen affinen Raum R, so daß alle Elemente von R Optimallösungen des linearen Programms sind. Insbesondere gibt es zu jedem (endlich lösbaren) linearen Programm der Form $\max c^T x$, $Ax \leq b$ eine Zeilenindexmenge I, so daß alle Punkte in $\{x | A_{I.}x = b_I\}$ Optimallösungen sind.