Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

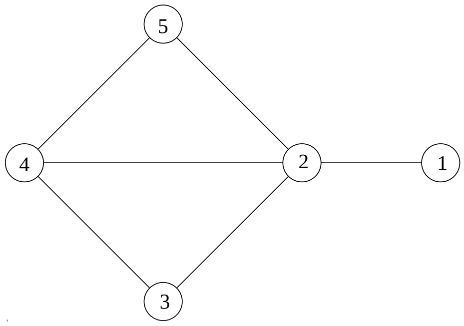
Lineare Optimierung

7. Übungsblatt

Abgabetermin: 1. Juni 1992 in der Übung

26. Aufgabe **1+1+1+2+2+2+2 Punkte**

Gegeben sei der folgende Graph $G = (V, E)$



Wir nennen eine Knotenmenge $S \subseteq V$ **stabil**, wenn keine zwei Knoten aus S durch eine Kante miteinander verbunden sind. Beispiel: $\{1, 3, 5\}$ ist stabil, $\{2, 3, 5\}$ ist nicht stabil. Die leere Menge ist auch stabil!

a) Bestimmen Sie alle stabilen Knotenmengen von G.

Sei $\mathrm{STAB}(G) := \operatorname{conv}\left(\{\chi^S \in \mathbb{R}^5 \mid S \subseteq V \text{ stabil}\}\right)$ das Stabile-Mengen-Polytop von G, das heißt die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren $\chi^S = \left(\chi_1^S, \ldots, \chi_5^S\right)^T$ der stabilen Mengen S von G.
Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Aussagen:

b) $\dim\left(\mathrm{STAB}(G)\right) = 5$.

c) $x_v \geq 0$ induziert für alle $v \in V$ eine Facette von $\mathrm{STAB}(G)$.

d) $x_1 + x_2 \leq 1$ induziert eine Facette von $\mathrm{STAB}(G)$.

e) $x_2 + x_3 \leq 1$ induziert keine Facette von $\mathrm{STAB}(G)$.

f) $x_2 + x_4 + x_5 \leq 1$ induziert eine Facette von $\mathrm{STAB}(G)$.

g) Berechnen Sie mit Fourier-Motzkin-Elimination eine vollständige Beschreibung von $\mathrm{STAB}(G)$.

27. Aufgabe **10 Punkte**

Als Vorstandsvorsitzender der Ölgesellschaft "Wer nicht wagt, der nicht gewinnt" stoßen Sie auf Hinweise, die auf Ölvorkommen im Wannsee hindeuten. Sie prüfen daher, ob und gegebenenfalls in welchem Umfang Sie Probebohrungen durchführen wollen. Sie glauben, daß diese Ihre Vermutung mit 40% Wahrscheinlichkeit bestätigen werden; mit 60% Wahrscheinlichkeit werden die Bohrlöcher dagegen trocken bleiben.

Im letzten Fall planen Sie, einige oder alle Bohrstellen der Probebohrungen zu Restaurants umzubauen, was allerdings jeweils eine Verdoppelung der ursprünglichen Investition voraussetzt. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit wird dieses Projekt entweder ein Erfolg und Ihre Gesellschaft gewinnt das Dreifache des in Umbauten investierten Betrages oder das Unternehmen stellt sich als Reinfall heraus und Sie erzielen nicht einmal Einnahmen.
Finden Sie Öl, so können Sie Ihre Probebohrungen bei Verzehnfachung der entsprechenden Investitionen zu Bohrinseln ausbauen; den Erwerb weiterer Bohrstellen wird das Bundeskartellamt verbieten. Wie ergiebig das Feld Wannsee dann wirklich ist, werden Sie leider erst feststellen, wenn die Quellen versiegen. Aufgrund der geologischen Verhältnisse schätzen Sie das Feld mit 20%, 50% beziehungsweise 30% als sehr, relativ beziehungsweise nicht ergiebig ein. Der Output aus einem Ölfeld ist proportional zu der von den Bohrtürmen "bedienten" Fläche; bei den von Ihnen ins Auge gefaßten Beträgen können Sie mit einem Gewinn proportional zum investierten Kapital rechnen. Die Proportionalitätsfaktoren glauben Sie wie folgt annehmen zu dürfen:

Wannsee-Feld	nicht ergiebig	relativ ergiebig	sehr ergiebig
Faktor	0,5	1,5	2

Die Kosten für Ihr Projekt müssen Sie aus Krediten bestreiten. Ein Konsortium aus zwei Banken A und B ist bereit, Ihnen Geld zu folgenden Bedingungen zur Verfügung zu stellen:

Zinssatz für	A	B
Probebohrung	20%	22%
Restaurants	15%	12%
Bohrinseln	17%	18%

Bedingung ist allerdings, daß nach Aufnahme der Kredite für die Probebohrungen die Folgekredite für Restaurants oder Bohrinseln wieder beim Konsortium aufgenommen werden. Bank A will insgesamt höchstens 50 Mio DM zur Verfügung stellen, Bank B für Folgeinvestitionen höchstens 8 mal so viel wie für die Probebohrungen. Für diese will das Konsortium insgesamt höchstens 10 Mio DM zur Verfügung stellen.
Bei "Wer nicht wagt, der nicht gewinnt" wird als Meßlatte für die Beurteilung eines Investitionsprojektes bei quantifizierter Unsicherheit der erwartete Gewinn verwendet.
Modellieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

28. Aufgabe **10 Punkte**

Gegeben sei das lineare Programm

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{aligned} &\max c^T x \\ &Ax \le b, \end{aligned}$$

wobei $\operatorname{rang}(A) \le n-1$ und $P(A,b) \ne \emptyset$ gelten soll. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a) Das Maximum von (P) ist endlich.

b) Die Menge der Optimallösungen von (P) enthält eine Gerade (d. h. es existieren x, $y \in \mathbb{R}^n$, so daß $x + \lambda y$ Optimallösungen von (P) sind für alle $\lambda \in \mathbb{R}$).

c) Der Vektor c ist konische Kombination der Zeilen von A.

29. Aufgabe **2+8 Punkte**

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polyeder, dann heißt $P^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^T x \le 1 \text{ für alle } x \in P\}$ die **Polare** von P.

a) Zeigen Sie: $(P^*)^* = P \Longleftrightarrow 0 \in P$.

b) Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein voll-dimensionales Polytop und sei 0 innerer Punkt von P. Beweisen Sie:

$$v \text{ Ecke von } P \iff v^T y \le 1 \text{ Facette von } P^*$$

$$u \text{ Ecke von } P^* \iff u^T x \le 1 \text{ Facette von } P$$