Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS92
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Lineare Optimierung

8. Übungsblatt

Abgabetermin: 9. Juni 1992 in der Übung

30. Aufgabe **10 Punkte**

Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Standardbreite von 105 cm und einer Länge von L cm her. Die Kunden verlangen jedoch Rollen mit geringerer Breite (aber derselben Länge L). Es liegen folgende Aufträge vor:

100 Rollen mit Breite 25 cm
125 Rollen mit Breite 30 cm
80 Rollen mit Breite 35 cm

Zur Erledigung der Aufträge werden Standardrollen zerschnitten. Z. B. kann der Fabrikant aus einer Papierrolle mit Standardbreite zwei Rollen von je 35 cm Breite und eine Rolle von 30 cm Breite schneiden. Das ergibt einen Schnittverlust von 5cm. Ziel des Fabrikanten ist die Minimierung der Schnittverluste für die vorliegenden Aufträge.
Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

31. Aufgabe **10 Punkte**

Eine Matrix A heißt **total unimodular**, wenn die Determinante jeder quadratischen Untermatrix von A einen der Werte $-1, 0, 1$ hat. Seien b und c ganzzahlige Vektoren und A eine total unimodulare Matrix. Beweisen Sie: Die Polyeder $\{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ und $\{x \mid Ax \leq b, 0 \leq x \leq c\}$ haben nur ganzzahlige Ecken.

32. Aufgabe **1+3+3+3 Punkte**

Gegeben seien n Personen und n Arbeiten. Zu jeder Person i und jeder Arbeit j gibt es einen Koeffizienten c_{ij}, der ausdrückt, wie gut die Person für diese Arbeit geeignet ist. Jede Person soll genau eine Arbeit ausführen.

a) Formulieren Sie das **Zuordnungsproblem**, die Personen optimal auf die Aufgaben zu verteilen, als lineares Programm $\max\{c^T x | Ax = b, x \geq 0\}$.

b) Zeigen Sie:

   i) $\text{rang}(A) = 2n - 1$.
   ii) Jede Ecke von $P^{=}(A, b)$ ist degeneriert.
   iii) Das in a) formulierte lineare Programm besitzt eine ganzzahlige Optimallösung.

33. Aufgabe **2+2+3+3 Punkte**

Das Polyeder $P(A, b)$ sei gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stellen Sie $P(A, b)$ graphisch dar und bestimmen Sie mit Hilfe von Fourier-Motzkin-Elimination alle Ecken.

b) Formen Sie $P(A, b)$ um in ein Polyeder $P^{=}(\bar{A}, \bar{b})$.

c) Bestimmen Sie alle regulären (3,3)-Untermatrizen von $\bar{A}$.

d) Berechnen Sie alle Basislösungen und ordnen Sie diese den Ecken zu. Welche Ecken bzw. Basislösungen sind entartet, welche sind zulässig?