Technische Universität Berlin SS 1994
Fachbereich 3
Prof. M. Grötschel/ Kamin

Lineare Optimierung
11. Übungsblatt

40. Aufgabe **(4 Punkte)**

Ein Unternehmen besitzt m Zementfabriken und hat n Kunden in n verschiedenen Orten. In einem Monat kann die i-te Fabrik höchstens a_i Tonnen Zement in *regulärer* Produktionszeit mit Kosten von r_i DM pro Tonne ($1 \leq i \leq m$) produzieren. Zusätzlich zur regulären Produktion kann die i-te Fabrik höchstens b_i Tonnen Zement in Überstunden produzieren, und zwar mit Kosten von s_i DM pro Tonne (wobei $s_i > r_i$, $1 \leq i \leq m$). Es darf erst dann mit Überstunden produziert werden, wenn die reguläre Produktionszeit voll ausgeschöpft ist.
Die Kosten für den Transport einer Tonne Zement von der i-ten Fabrik zum j-ten Kunden betragen c_{ij} DM.
Der während eines Monats produzierte Zement kann noch im selben Monat zu den Kunden transportiert und an sie verkauft werden.
Der j-te Kunde hat einen Bedarf von d_j Tonnen Zement ($1 \leq j \leq n$). Es besteht kein Zwang, daß dieser Bedarf tatsächlich gedeckt wird. Für jede Tonne Zement, die den bestehenden Bedarf ganz oder teilweise deckt, zahlt der Kunde j einen Preis von α_j DM. Jede zum j-ten Ort transportierte Tonne Zement, die den Bedarf übersteigt, kann im selben Ort an einen Baustoffhandel zu einem Preis von γ_j DM pro Tonne (ohne Mengenbeschränkung) verkauft werden ($\gamma_j < \alpha_j$, $1 \leq j \leq n$), während jede Tonne Zement, die zur Deckung des Bedarfs fehlt, eine Vertragsstrafe von δ_j DM zur Folge hat.
Formulieren Sie das Problem, den Gewinn für das Unternehmen zu maximieren, als lineares Programm.

41. Aufgabe **(4 Punkte)**

Man betrachte die Behandlung des Problems

$$\begin{array}{rll} \max\ \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j & & \\ \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j\right) + x_i & \leq 100^{i-1} & (i = 1, 2 \ldots, n) \\ x_j & \geq 0 & (j = 1, 2 \ldots, n) \end{array}$$

durch das Simplexverfahren. Die Schlupfvariablen seien mit $s_1, \ldots, s_n$ bezeichnet. Zeigen Sie, daß in jeder zulässigen Basis genau eine der Variablen x_i und s_i enthalten ist.

42. Aufgabe **(4 Punkte)**

Lösen Sie das folgende LP mit dem revidierten Simplexverfahren:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrl}
\min & x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & - & 5x_6 & & \\
& 6x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & + & 2x_6 & = & 4 \\
& 2x_1 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & & & = & 3 \\
& 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & + & 4x_4 & + & \frac{1}{2}x_5 & + & x_6 & = & 2 \\
& & & & & x_1, & & x_2, \; x_3, & & x_4, \; x_5, & & x_6 & \geq & 0
\end{array}$$

Verwenden Sie das revidierte Simplexverfahren ebenfalls zur Ermittlung einer zulässigen Ausgangsbasis mit der 2-Phasen-Methode.

43. Aufgabe **(4 Punkte)**

Betrachten Sie das folgende lineare Programm (P):

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & 3x_1 & + & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 8 \\
& 2x_1 & - & 2x_2 & \leq & 7 \\
& 1 & \leq & x_1 & \leq & 4 \\
& 0 & \leq & x_2 & \leq & 3
\end{array}$$

(a) Transformieren Sie (P) auf das Problem $(\bar{P})$ der Form

$$\begin{array}{rrcl}
\max & c^T x & & \\
& Ax & = & b \\
0 \leq & x & \leq & u
\end{array}$$

(b) Lösen Sie $(\bar{P})$ mit der Obere-Schranken-Technik.

(c) Wie lautet die Lösung des Ausgangsproblems?

Abgabe: 30.6. bzw. 1.7.1994 im jeweiligen Tutorium