Technische Universität Berlin SS 1994
Fachbereich 3
Prof. M. Grötschel/ Kamin

Lineare Optimierung
2. Übungsblatt

5. Aufgabe **(4 Punkte)**
Sei $S \subseteq \mathbb{K}^n$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{aff}(S) = \mathrm{lin}(S) \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{aff}(S)$

(b) $\forall x \in \mathrm{aff}(S) : \mathrm{aff}(S) = x + \mathrm{lin}(S - x)$

(c) $\mathrm{cone}(S) = \mathrm{lin}(S) \Leftrightarrow \forall x \in S : -x \in \mathrm{cone}(S \setminus \{x\})$

6. Aufgabe **(4 Punkte)**
Beweisen Sie den folgenden Satz:

Es seien $A \in \mathbb{K}^{(m,n)}$, $b \in \mathbb{K}^m$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. $D \in \mathbb{K}^{(r,n)}$ und $d \in \mathbb{K}^r$ seien durch Fourier-Motzkin-Elimination der j-ten Variablen im Ungleichungssystem $Ax \leq b$ berechnet worden. Es seien ferner $I, J \subseteq M = \{1, 2, \ldots, m\}$ mit $I \cap J = \emptyset$, $I \cup J = M$, und $E \cup F = R = \{1, 2, \ldots, r\}$ definiere eine Partition der Zeilenindexmenge von D wie folgt:

$$E := p^{-1}((Z \cap I) \cup ((N \times P) \cap (I \times I)),$$
$$F := R \setminus E.$$

Dann hat das System

$$A_{I.}x \leq b_I \ , \quad A_{J.}x < b_J$$

eine Lösung genau dann, wenn das System

$$D_{E.}x \leq d_E \ , \quad D_{F.}x < d_F$$

eine Lösung hat.

7. Aufgabe **(4 Punkte)**

Wenden Sie Fourier-Motzkin-Elimination an, um festzustellen, ob das folgende Ungleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 3x_4 &\leq 2 \\ -x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 &\leq -3 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 &\leq 2 \end{aligned}$$

D. h. führen Sie das Projektions-Verfahren sukzessive für das obige System mit den Richtungsvektoren e_1, e_2, e_3 und e_4 durch.

8. Aufgabe **(Abgabe: 5.5 bzw. 6.5.1994)**

Programmieren Sie das Verfahren von Fourier-Motzkin zur Elimination von Variablen in einem Ungleichungssystem der Form $Ax \leq b$. Ihr Programm soll sukzessive eine durch eine Liste gegebene Teilmenge der Variablen eliminieren und die hierbei entstehenden Ungleichungssysteme ausgeben. Versuchen Sie, diese Systeme zu reduzieren (Entfernung doppelter oder offensichtlich redundanter Ungleichungen). Ihr Programm soll gut dokumentiert sein.

Führen Sie das Verfahren für die Beispiele aus, die im Verzeichnis "/lop-001/ieq" zu finden sind.

Abgabe (Aufgabe 5-7): 28.4. bzw. 29.4.1994 im jeweiligen Tutorium