Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

10. Übungsblatt

Abgabetermin: 7. Juli 1993 in der Übung

29. Aufgabe **10 Punkte**

Wie gewohnt bezeichne $\overline{C_k} = \big(V, E_k \dot\cup \overline{E}\big)$ für ungerades $k \geq 3$ ein odd hole mit einigen zusätzlichen Kanten. Zeigen Sie, daß die odd hole-Facette von $\mathrm{PST}\big(\overline{C_k}\big)$ die Projektion von gerichteten Steinerschnittungleichungen im Sinne der Übung ist.

30. Aufgabe **8+4 Punkte**

$Ax = b$ sei ein rationales Gleichungssystem mit einer ganzzahligen Lösung x_0. Dann gibt es ganzzahlige Vektoren $x_1, \ldots, x_t$ mit der Eigenschaft

$$\{\, x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b \,\} = \Big\{ x_0 + \sum \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{Z} \quad \forall i \Big\}.$$

Können Sie auch zeigen, daß die Vektoren $x_1, \ldots, x_t$ linear unabhängig gewählt werden können?

31. Aufgabe **5+5 Punkte**

(1) Bestimmen Sie die Hermite-Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 12 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) Hat das GLS

$$\begin{aligned} 12x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned}$$

eine ganzzahlige Lösung? Wenn ja, geben Sie alle ganzzahligen Lösungen an, wenn nein, beweisen Sie, daß keine ganzzahlige Lösung existiert.

32. Aufgabe **5+5 Zusatzpunkte**

$\mathcal{P}$ sei ein $\mathcal{NP}$-schweres kombinatorisches Maximierungsproblem. Das (unbekannte und im allgemeinen sehr große) Ungleichungssystem

$$Ax \leq b \tag{1}$$

mit $(A, b) \in \mathbb{Q}^{m\times(n+1)}$ beschreibe die konvexe Hülle seiner Lösungen. Wie Sie wissen, haben alle Ungleichungen von (A, b) eine in der Kodierungslänge von $\mathcal{P}$ polynomiale Kodierungslänge.
Wie gut können wir erwarten, dieses System zu "kennen"? Unter "kennen" wollen wir verstehen, daß wir für jede gegebene Ungleichung

$$a^T x \leq \beta \tag{2}$$

in Zeit polynomial in der Kodierungslänge von $\mathcal{P}$ und in der Kodierungslänge von (a^T, β) (nicht aber polynomial in der Kodierungslänge von (A, b)!) entscheiden können, ob (a^T, β) eine gültige Ungleichung für (1) ist.

(1) Ist (a^T, β) gültig für (1), so existiert ein nichtnegatives y mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{rcl} y^T A & = & a^T \\ y^T b & \leq & \beta. \end{array} \tag{3}$$

y hat dabei o.B.d.A. höchstens n positive Komponenten und eine in der Kodierungslänge von $\mathcal{P}$ und (a^T, β) polynomiale Kodierungslänge.

(2) Angenommen, es wäre möglich, (A, b) im oben vereinbarten Sinne zu kennen. Ist γ eine obere Schranke für den Zielfunktionswert von $\mathcal{P}$, so gäbe es einen polynomialen Beweis hierfür, d.h. für

$$c^T x \leq \gamma \qquad \forall x : Ax \leq b.$$

Hieraus würde $\mathcal{NP} = \text{Co-}\mathcal{NP}$ folgen.