Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

11. Übungsblatt

Abgabetermin: 14. Juli 1993 in der Übung

33. Aufgabe **5+5 Punkte**

$Ax \leq b$ sei ein rationales Ungleichungssystem. Dann gibt es eine nichtnegative rationale Zahl q, so daß das Ungleichungssystem

$$(1/q)Ax \leq (1/q)b$$

total dual ganzzahlig ist. Finden Sie eine TDI-Darstellung des Polytops

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x_1 & + & x_2 & \leq & 28 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & 27 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \end{array} \right\}.$$

34. Aufgabe **2+4 Punkte**

Die Ungleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & & & \leq & 0 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

beschreiben dasselbe Polyeder. Das erste System ist total dual ganzzahlig, das zweite nicht.

Die folgenden Aufgaben sind Zusatzaufgaben. Bearbeiten Sie bis zu drei davon.

35. Aufgabe **2+2+2+2+2 Zusatzpunkte**

U sei eine $n \times n$-Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(1) U ist unimodular.

(2) $U\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n$.

(3) $AU\mathbb{Z}^n = A\mathbb{Z}^n$ für alle dimensionsverträglichen Matrizen A.

(4) Die Hermite-Normalform von U ist I.

(5) U entsteht aus I durch elementare Spaltenoperationen.

36. Aufgabe **1+1+1+1+1+3+2+2 Zusatzpunkte**

Richtig oder falsch? Begründen Sie!

(1) Die Matrix (A, b) sei rational. Hat das System $Ax \leq b$ eine ganzzahlige Lösung, so folgt aus $y^T A \in \mathbb{Z}^m$ immer $y^T b \in \mathbb{Z}$.

(2) Die Matrix (A, b) sei rational. Folgt aus $y^T A \in \mathbb{Z}^m$ immer $y^T b \in \mathbb{Z}$, so hat das System $Ax \leq b$ eine ganzzahlige Lösung.

(3) Sind A und B total unimodulare $n \times n$-Matrizen, so auch AB.

(4) $P^{=}(A, b)$ ganzzahlig für alle $b \in Z^n \iff P(A, b) \cap P(-I, 0)$ ganzzahlig für alle $b \in \mathbb{Z}^n$. Falls das nicht richtig ist, ist wenigstens eine der beiden Implikationen richtig?

(5) Betrachten Sie das Optimierungsproblem $\max c^T x \;\; Ax \leq b$. Hat das hierzu duale Programm für jedes ganzzahlige c einen ganzzahligen Optimalwert, so ist $P(A, b)$ ganzzahlig, ja sogar total dual ganzzahlig.

(6) A unimodular $\iff \gcd(y^T A) = \gcd(y^T) \quad \forall y \in \mathbb{Z}^m$.

(7) $Ax \leq b$ ist total dual ganzzahlig für alle rationalen $b \iff A$ ist total unimodular.

(8) Bezeichne $\leq$ wie üblich die komponentenweise Halbordnung in $\mathbb{R}^n$. P sei ein volldimensionales Polyeder im $\mathbb{R}^n$. Dann definiert eine Stützhyperebene $a^T x \leq 1$ von P genau dann eine Facette von P, wenn a bezüglich $\leq$ minimal ist. Wenn das nicht richtig ist, ist wenigstens eine der beiden Implikationen richtig?

37. Aufgabe **10 Zusatzpunkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Betrachten Sie das Polytop

$$\mathrm{EUL}(G) := \mathrm{conv}\,\{\, \chi^F : F \subseteq E \text{ eulersch} \,\}.$$

Bestimmen Sie $\dim\big(\mathrm{EUL}(G)\big)$ (oder ersatzweise eine möglichst gute obere und untere Schranke hierfür).

38. Aufgabe **5+1 Zusatzpunkte**

Für das symmetrische Travelling-Salesman Polytop zeige man (mit Hilfe der Gleichungen $x\big(\delta(v)\big) = 2$), daß die Kurzzyklusbedingung $x\big(E(W)\big) \leq |W| - 1$ äquivalent ist zur Schnittungleichung $x\big(\delta(W)\big) \geq 2$. Welche Ungleichung können Sie besser separieren und warum?

39. Aufgabe **10 Zusatzpunkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, der ein perfektes Matching enthalte. Zeigen Sie, daß das folgende System von Gleichungen und Ungleichungen das Polytop der perfekten Matchings in G beschreibt:

$$\begin{aligned} x\big(\delta(v)\big) &= 1 && \forall v \in V \\ x\big(\delta(W)\big) &\geq 1 && \forall W \subseteq V,\ |W| \geq 3,\ |W| \text{ ungerade} \\ x_e &\geq 0 && \forall e \in E. \end{aligned}$$

Benutzen Sie hierbei die vollständige Beschreibung

$$\begin{aligned} x\big(\delta(v)\big) &\leq 1 && \forall v \in V \\ x\big(E(W)\big) &\leq \tfrac{1}{2}(|W| - 1) && \forall W \subseteq V,\ |W| \geq 3 \text{ und ungerade} \\ x_e &\geq 0 && \forall e \in E. \end{aligned}$$

des Polytops $\mathrm{MATCH}(G)$.

40. Aufgabe **5+5 Zusatzpunkte**

Gegeben sei die Situation von Aufgabe 25. Für eine Kante c aus G bezeichne $G - c$ den durch Weglassen der Kante c aus G entstehenden Graphen $\big(V, E \setminus \{\, c \,\}\big)$. Wir betrachten die Ungleichungen

$$\sum_{e \neq c} \pi_e x_e \geq \pi_0 \tag{1}$$

und

$$\sum_{e \in E} \pi_e x_e \geq \pi_0. \tag{2}$$

(1) Definiert (1) eine Facette von $\mathrm{PST}(G-c)$, so definiert (2) mit

$$\pi_e = \pi_0 - \min\left\{ \sum_{e \neq c} \pi_e x_e : x \in \mathrm{PST}(G \cdot c) \right\}$$

eine Facette von $\mathrm{PST}(G)$.

(2) Definiert (2) eine Facette von $\mathrm{PST}(G)$, so ist (1) gültig für $\mathrm{PST}(G-c)$. Für jede Ungleichung (1), die eine Facette von $\mathrm{PST}(G-c)$ definiert, gibt es eine für $\mathrm{PST}(G)$ facettendefinierende Ungleichung (2), so daß man (1) durch Weglassen des Koeffizienten π_e erhält.