Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

2. Übungsblatt

Abgabetermin: 12. Mai 1993 in der Übung

4. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne isolierte Knoten und mit Kantengewichten c. Das Matchingproblem in G läßt sich wie folgt als ganzzahliges lineares Programm formulieren.

$$\begin{aligned} \max c^T x& \\ x\big(\delta(v)\big) &\le 1 \qquad \forall v \in V \\ x &\ge 0 \\ x &\in \{\,0,1\,\}^E. \end{aligned} \tag{IP}$$

Sei $P(G)$ die Menge der Lösungen der LP-Relaxierung von (IP) und $\mathrm{MATCH}(G)$ die konvexe Hülle der Inzidenzvektoren der Matchings von G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $P(G) = \mathrm{MATCH}(G) \iff G$ ist bipartit.

(2) Zeigen Sie, daß die **blossom inequalities**

$$x\big(E(W)\big) \le \tfrac{1}{2}\big(|W| - 1\big) \qquad \forall W \subseteq V, |W| \ge 3 \text{ und ungerade}$$

im elementaren Abschluß der LP-Relaxierung von (IP) liegen. (Edmonds hat 1963 bewiesen, daß die Ungleichungen der LP-Relaxierung von (IP) zusammen mit den blossom inequalities $\mathrm{MATCH}(G)$ vollständig beschreiben. In diesem Falle liefert somit der elementare Abschluß der LP-Relaxierung bereits eine vollständige Beschreibung des Polytops. Dies ist jedoch keineswegs immer so, vergleiche etwa die folgende Aufgabe.)

5. Aufgabe **5 Zusatzpunkte**

Gegeben sei das folgende Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} -kx + y &\le 0 \\ kx + y &\le k \\ -y &\le 0 \end{aligned} \tag{A,b}$$

dessen ganzzahlige Lösungen die Vektoren $\binom{0}{0}$ und $\binom{1}{0}$ sind. Zeigen Sie, daß die Ungleichungen

$$\begin{aligned} y &\le \lfloor \tfrac{k}{2} \rfloor \\ -y &\le 0 \\ x &\le 1 \end{aligned}$$

zu $e^1(A,b)$ gehören, daß aber die Ungleichung $y \le 0$ aus $\mathrm{cl}(A,b)$ für $k \ge 2$ nicht zu $e^1(A,b)$ gehört.

6. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $P = \text{conv}(V) + \text{cone}(E) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein rationales und volldimensionales Polyeder, so daß die Kodierungslänge jedes Vektors aus $V \cup E$ höchstens ν ist, dann gibt es ein Ungleichungssystem $Ax \leq b$ mit $P = P(A, b)$ so daß jede Ungleichung des Systems höchstens die Kodierungslänge $3n^2\nu$ hat.

7. Aufgabe **10 Punkte**

Der Graph $G = (V, E)$ sei zweifach zusammenhängend (d.h. G enthält keine Brücke und keinen Artikulationsknoten). Zeigen Sie, daß ein Steinerschnitt $\delta(V_1, V_2)$ genau dann minimal ist, wenn V_1 und V_2 beide zusammenhängende Untergraphen von G induzieren.