Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

3. Übungsblatt

Abgabetermin: 19. Mai 1993 in der Übung

8. Aufgabe **5 Punkte**

Lösen Sie das ganzzahlige lineare Programm

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - x_2 \\ & 2x_1 \le 3 \\ & 2x_2 \le 3 \\ & x \ge 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^2 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gomory-Algorithmus (fügen Sie jeweils genau den ersten möglichen Gomory-Schnitt hinzu) und skizzieren Sie die auftretenden Schnitte.

9. Aufgabe **10 Punkte**

Die Steinerpartitionsungleichung

$$x\big(\delta_G(V_1,\ldots,V_k)\big) \ge k-1 \tag{1}$$

definiere eine Facette von $\mathrm{PST}(G)$. Ferner seien alle knoteninduzierten Graphen $G(V_i)$ zusammenhängend (Diese Bedingung ist, wie wir bald in der Übung sehen werden, ohnehin notwendig.). Der Graph $\overline{G}$ ergebe sich aus G durch Hinzufügen der Kante $e \in V \times V$. Zeigen Sie, daß man durch Liften der Ungleichung (1) die Steinerpartitionsungleichung

$$x\big(\delta_{\overline{G}}(V_1,\ldots,V_k)\big) \ge k-1 \tag{2}$$

erhält.

10. Aufgabe **3+3+1+1+4 Punkte**

Sei

$$\begin{array}{r|cc} -c_B^T\overline{b} & 0^T & \overline{c}_N^T \\ \hline \overline{b} & I & \overline{A}. \end{array}$$

ein primal und dual zulässiges Simplextableau für ein lineares Porgramm

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{LP}$$

(LP) sei die LP-Relaxierung eines kombinatorischen 0/1-Optimierungsproblems (IP) und es gelte $0 < \overline{b}_i < 1$; c^* sei eine obere Schranke auf die Optimallösung von (IP). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Wird zu (LP) die Ungleichung $x_i \le 0$ hinzugefügt, so vergrößert sich der Optimalwert von (LP) um mindestens $\overline{b}_i \min\left\{ \overline{c}_j/\overline{a}_{ij} : \overline{a}_{ij} > 0 \right\}$.

(2) Wird zu (LP) die Ungleichung $x_i \geq 1$ hinzugefügt, so vergrößert sich der Optimalwert von (LP) um mindestens $(1 - \overline{b}_i) \min \{ -\overline{c}_j / \overline{a}_{ij} : \overline{a}_{ij} < 0 \}$.

(3) Ist
$$c^* < c_B^T \overline{b} + \overline{b}_i \min \{ \overline{c}_j / \overline{a}_{ij} : \overline{a}_{ij} > 0 \},$$
dann gibt es eine Optimallösung von (IP) mit $x_i = 1$.

(4) Ist
$$c^* < c_B^T \overline{b} + (1 - \overline{b}_i) \min \{ -\overline{c}_j / \overline{a}_{ij} : \overline{a}_{ij} < 0 \},$$
dann gibt es eine Optimallösung von (IP) mit $x_i = 0$.

(5) Sei (LP) dual degeneriert, d.h. Nichtbasisvariablen haben verschwindende reduzierte Kosten. Wie beurteilen Sie die Aussichten, daß Ihnen obiges Kriterium ein Fixieren von Basisvariablen ermöglicht? Wie steht es mit dem Rechenaufwand? Vergleichen Sie mit dem Aufwand für ein reduced cost fixing von Nichtbasisvariablen.