Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 26. Mai 1993 in der Übung

11. Aufgabe **3+3+3 Punkte**
Betrachten Sie das lineare Programm

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{LP}$$

Lösen Sie mit Hilfe der Gomory-Verfahren die folgenden Programme.

(1) (LP) mit der zusätzlichen Bedingung $x_1 \in \mathbb{Z}$.

(2) (LP) mit den zusätzlichen Bedingungen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

(3) (LP) mit der zusätzlichen Bedingung $x \in \mathbb{Z}$.

12. Aufgabe **2+2+2+2+2 Punkte**
Die Ungleichung $\pi^T x \geq \pi_0$ mit $\pi_0 > 0$ definiere eine Facette F von $\mathrm{PST}(G)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Ist $\pi_e > 0$ für ein $e \in E$, so gibt es einen Steinerbaum Y mit $\chi^Y \in F$, der e enthält.

(2) Sei C ein Kreis in G, der die Kante e enthält. Dann gilt

$$\pi_e \leq \sum_{f \in C - e} \pi_f.$$

(3) Sei $T \subseteq \{\, e \in E : \pi_e = 0 \,\}$ ein Baum. Dann gilt

$$e \in G\big(V(T)\big) \Longrightarrow \pi_e = 0.$$

(4) Kontraktion aller Kanten e in G mit $\pi_e = 0$ liefert einen Graphen G_π. Die Ungleichung $\pi^T x \geq \pi_0$ definiert genau dann eine Facette von $\mathrm{PST}(G)$, wenn $\pi^T_{\mathrm{supp}(\pi)} x \geq \pi_0$ eine Facette von $\mathrm{PST}(G_\pi)$ definiert.

(5) Wie sieht G_π aus, wenn $\pi^T x \geq \pi_0$ eine Steinerpartitionsungleichung ist?

13. Aufgabe **2+3+5 Punkte**

Sei mit den bekannten Bezeichnungen der Vorlesung

$$(\overline{a}_{ij})_{\substack{0\le i\le m\\ 0\le j\le n}} := \begin{array}{r|cc} -c_B^T\overline{b} & 0^T & \overline{c}_N^T \\ \hline \overline{b} & I & \overline{A}. \end{array} \tag{T}$$

ein primal und dual zulässiges Simplextableau für ein LP in Standardform. O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß das Tableau lexikographisch positiv ist, d.h. daß alle Spalten $\overline{A}_{\cdot j}$ für $j \neq 0$ lexikographisch positiv sind. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Das lexikographische Maximum der Spalten $\overline{A}_{\cdot j}$ für $j \neq 0$ wird o.B.d.A. eindeutig angenommen, d.h. es gibt genau eine lexikographisch größte Spalte.

(2) Sei (T) ein dual zulässiges und lexikographisch positives Simplextableau. Wird beim dualen Simplexalgorithmus als Pivotspalte die lexikographisch größte Spalte $1/\overline{a}_{rs}\overline{A}_{\cdot j}$ mit $\overline{a}_{rs} < 0$ gewählt, so gehen lexikographisch positive Tableaux in ebensolche über.

(3) Bei einem dualen Pivotschritt im Gomory-Algorithmus werde die zu einer Schlupfvariable eines Gomory-Schnitts gehörige Spalte s des Tableaus in die Basis aufgenommen. Ist r die Pivotzeile, so sind die neuen Spalten des Tableaus nach dem Pivot gegeben durch

$$\overline{\overline{A}}_{\cdot j} := \overline{A}_{\cdot j} - \frac{\overline{a}_{rj}}{\overline{a}_{rs}}\left(\overline{A}_{\cdot s} - e_r\right)$$

und lexikographisch positiv. Zeigen Sie, daß dies auch noch so ist, wenn man die zu dem Gomory-Schnitt gehörige r-te Zeile des Tableaus streicht. Unterscheiden Sie hierzu die Fälle $\overline{\overline{a}}_{rj} \le 0$ und $\overline{\overline{a}}_{rj} > 0 \iff \overline{a}_{rj} < 0$.