Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

6. Übungsblatt

Abgabetermin: 9. Juni 1993 in der Übung

17. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und

$$\begin{aligned}
\mathrm{CON}(G) &:= \operatorname{conv}\{\, \chi^C \in \mathbb{R}^E \mid (V, C) \text{ zusammenhängend} \,\} \\
&= \operatorname{conv}\{\, \chi^C \in \mathbb{R}^E \mid \exists \text{ aufspannender Baum } T \text{ mit } T \subseteq C \,\} \\
\mathrm{P}(G) &:= \{\, x \in \mathbb{R}^E \mid 0 \leq x \leq \mathbb{1} \,\} \\
&\quad \cap \{\, x \in \mathbb{R}^E \mid x(\delta(W)) \geq 1 \quad \forall \emptyset \subsetneq W \subsetneq V \,\}
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt dann $\mathrm{CON}(G) \subseteq \mathrm{P}(G)$.
Finden Sie einen Graphen G, so daß $\mathrm{CON}(G) \neq P(G)$ gilt.

18. Aufgabe **2+2+2+2+2 Punkte**

Die Ungleichung $\pi^T x \geq \pi_0$ definiere eine Facette von $\mathrm{PST}(G)$. Der Graph $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ entstehe aus G durch Kontraktion aller Kanten e mit $\pi_e = 0$, $N_\pi \subseteq V_\pi$ sei die Menge der Knoten von G_π, zu denen in G mindestens ein Terminal gehört.
Beweisen Sie, daß G_π zweifach zusammenhängend ist, indem Sie die Annahme des Gegenteils wie folgt zum Widerspruch führen.

(1) Ist G_π nicht zweifach zusammenhängend, so enthält G_π einen Artikulationsknoten v.

(2) v zerlege G_π in Komponenten $G_1, \ldots, G_k$. Jede Komponente G_i enthält einen Knoten aus N_π.

(3) Für jedes i betrachten wir das Steinerbaumproblem $(ST)_i$ auf G_i mit Terminals $\big(N_\pi \cap V(G_i)\big) \cup \{\, v \,\}$. Ist π_i die Einschränkung von π auf $E(G_i)$ und

$$\pi_0^i := \min\{\, \pi_i^T \chi^Y : Y \text{ Steinerbaum für } (ST)_i \,\},$$

so gilt

$$\pi_0 = \sum \pi_0^i.$$

(4) Die Ungleichungen $\pi_i^T x \geq \pi_0^i$ sind gültig für $\mathrm{PST}(G)$.

(5) $\pi^T x \geq \pi_0$ definiert keine Facette.

19. Aufgabe **3+3+3 Punkte**

Sei $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} E_i$, $b_i \in \mathbb{N}$ für alle i und $(E, \mathcal{I})$ das zugehörige Partitionsmatroid.

(1) Welche Teilmengen von E sind abgeschlossen?

(2) Welche sind inseparabel?

(3) Geben Sie eine vollständige und irredundante Beschreibung des zu $(E, \mathcal{I})$ gehörigen Matroidpolytops an.