Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
SS93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Polyedrische Kombinatorik

7. Übungsblatt

Abgabetermin: 16. Juni 1993 in der Übung

20. Aufgabe **2+8 Punkte**

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) A ist total unimodular $\iff$ (A, I) ist unimodular.

(2) A habe vollen Zeilenrang. Dann ist A genau dann unimodular, wenn für jede Basis B von A und jeden ganzzahligen Vektor t der Vektor $B^{-1}t$ ganzzahlig ist.

21. Aufgabe **2+4+4+2 Punkte**

Der Graph C_k sei für natürliches k wie in der Übung definiert. Wie Sie wissen, definiert die Ungleichung

$$x(E_k) \geq 2(k-1)$$

eine Facette von $\mathrm{PST}(C_k)$. Aus dieser Facette wollen wir durch Liften eine Facette für einen größeren Graphen ableiten. Dieser Graph $\overline{C_k}$ entstehe aus $C_k = (V_k, E_k)$ durch Hinzufügen einiger Kanten, d.h. $\overline{C_k} = (V, E_k \,\dot\cup\, E_0)$. Beweisen Sie (durch sequentielles Lifting), daß die Ungleichung

$$x(E_k) + 2x(E_0) \geq 2(k-1) \tag{1}$$

für ungerades $k \geq 3$ eine Facette von $\mathrm{PST}\big(\overline{C_k}\big)$ definiert. Nehmen Sie hierzu an, daß die Ungleichung

$$x(E_k) + 2x(E_1) \geq 2(k-1) \tag{2}$$

für $E_1 \subsetneqq E_0$ eine Facette von $\mathrm{PST}\,(V, E_1)$ definiert. e sei eine Kante aus $E_0 \setminus E_1$.

(1) Wie sieht das Liftingproblem für das Liften der Variable x_e in die Ungleichung (2) aus?

(2) Zeigen Sie durch Angabe eines geeigneten Steinerbaumes, daß der Liftingkoeffizient von x_e mindestens 2 ist.

(3) Zeigen Sie durch Widerspruch, daß der Liftingkoeffizient der Variablen höchstens 2 ist. Ersetzen Sie dazu in einem geeigneten Steinerbaum die Kante e durch geeignete Kanten und leiten Sie einen Widerspruch zur Gültigkeit von (2) für $\mathrm{PST}\,(V, E_1)$ ab.

(4) (2) definiert eine Facette von $\mathrm{PST}\big(V, E_k \,\dot\cup\, E_1 \,\dot\cup\, \{\, e \,\}\big)$.

22. Aufgabe **5+5 Punkte**

Sei A die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines Graphen G mit κ Komponenten. Zeigen Sie

$$\operatorname{rang} A = |V| - \kappa.$$

Wie sehen die regulären Untermatrizen von A aus?