Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

11. Übungsblatt

Abgabetermin: 21. Januar 1993 in der Übung

41. Aufgabe **2+4+4+4 Punkte**

Gegeben sei ein vollständiger Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und keineswegs notwendigerweise nichtnegativen Kantengewichten c_{ij}. Die Distanzmatrix $C := \big(c_{ij}\big)$ sei eine obere Dreiecksmatrix, d.h. $i \geq j \Longrightarrow c_{ij} = 0$ für alle ij.

Wir betrachten unter obigen Voraussetzungen das TSP und das zugehörige Assignment-Problem

$$\begin{array}{lrcll} \min & \sum c_{ij}x_{ij} & & & \\ & \sum\limits_i \quad x_{ij} & = & 1 & \forall j \\ & \sum\limits_j \quad x_{ij} & = & 1 & \forall i \\ & x_{n1} & = & 1 & \\ & x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall ij \end{array} \tag{1}$$

x^* sei eine Optimallösung von (1).

(1) Jede Lösung von (1) zerfällt in disjunkte gerichtete Kreise.

(2) Für alle Inzidenzvektoren t von Touren gilt

$$c^T t \geq c^T x^*.$$

Hinweis: Eine Tour zerfällt in einen $(1, n)$- und einen $(n, 1)$-Weg. Entfernen Sie aus dem letzteren alle Bögen (i, j) mit $i \geq j$, so daß Sie eine Anzahl von Wegen erhalten. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Wege eine gleich teuere Lösung des Assignment-Problems.

(3) Sei t^* Inzidenzvektor einer optimalen Tour. Dann gilt

$$c^T t^* = c^T x^*.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Kreise von x^*. Entfernen Sie aus den Kreisen, die nicht den Bogen $(n, 1)$ enthalen, alle Bögen (i, j) mit $i \geq j$ und aus dem letzten Kreis den Bogen $(n, 1)$, so daß Sie wieder eine Anzahl von Wegen erhalten. Konstruieren Sie mit Hilfe dieser Wege eine gleich teure Tour.

(4) Der genannte Spezialfall des TSP ist polynomial lösbar.

42. Aufgabe **5+5 Punkte**

Formulieren Sie das folgende "m-Travelling-Salesman-Problem" als lineares Programm: Gegeben ist $m > 0$ und ein vollständiger Graph K_n mit Kantengewichten und einem ausgezeichneten Knoten u_0. Gesucht sind m Kreise durch u_0 minimaler Gesamtlänge, so daß jeder Knoten außer u_0 von genau einem der Kreise erreicht wird.

(1) Formulieren Sie das m-TSP als ganzzahliges lineares Program.

(2) Reduzieren Sie das m-TSP auf das 1-TSP.

43. Aufgabe **2+4+4 Punkte**

Ein (ungerichtetes) TSP sei gegeben durch n Punkte in allgemeiner Lage im Einheitsquadrat $[0,1]^2$, und ihre euklidischen Abstände. Sei T eine minimale Tour. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Jede minimale Tour für ein solches Problem ist kreuzungsfrei.

(2) Es gibt eine Konstante $\alpha > 0$, so daß die minimale Tour T für jedes euklidische TSP $c(T) \leq \alpha\sqrt{n}$ erfüllt.

(3) Es gibt eine Konstante $\beta > 0$, so daß es für jedes n ein euklidisches TSP gibt, dessen minimale Tour $c(T) \geq \beta\sqrt{n}$ erfüllt.

44. Aufgabe **5+5 Punkte**

Gegeben seien n ganze Zahlen. Das `SUBSET SUM`-Problem besteht darin, diese Zahlen in zwei Teilmengen S und T zu partitionieren, so daß die Differenz der Zahlensummen von S und T minimal ist.

(1) Entwerfen Sie eine polynomiale Heuristik zur Lösung des `SUBSET SUM`-Problems.

(2) Schätzen Sie Laufzeit und Güte Ihrer Heuristik ab.