Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

12. Übungsblatt

Abgabetermin: 28. Januar 1993 in der Übung

45. Aufgabe **2+2+2+2+2 Punkte**

Gegeben sei ein binäres Knapsack-Problem

$$\begin{array}{rcl} \max c^T x & & \\ a^T x & \leq & b \\ x & \in & \{0,1\}^n. \end{array} \tag{K}$$

O.B.d.A. sei x^* die einzige Optimallösung, x eine (heuristische) Lösung von (K).
Definiere iterativ die folgenden Relationen R^h für $h \in \mathbb{N}_0$ wie folgt:

$$iR^0 j \quad :\Longleftrightarrow \quad a_i \geq a_j \quad \text{und} \quad c_i \leq c_j.$$

$$iR^{h+1} j \quad :\Longleftrightarrow \quad iR^h j \quad \text{oder} \quad \exists S \subseteq \{1,\ldots,n\} : \begin{cases} sR^h j & \forall s \in S \\ a_j + \sum_{s \in S} a_s \leq a_i \\ c_j + \sum_{s \in S} c_s \geq c_i \end{cases}$$

Setze dann

$$R := \lim_{h \to \infty} R^h.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $x_i^* = 0$ und $jRi \Longrightarrow x_j^* = 0$.

(2) $x_i^* = 1$ und $iRj \Longrightarrow x_j^* = 1$.

(3) $a_i + \sum_{iRj} a_j > b \Longrightarrow x_i^* = 0$.

(4) $c^T \mathbb{1} - c_i - \sum_{jRi} c_j < c^T x \Longrightarrow x_i^* = 1$.

(5) Interpretieren Sie die obigen Aussagen.

46. Aufgabe **10 Punkte**

Zeigen Sie, wie das Knapsack-Problem (pseudopolynomial) in ein Kürzeste-Wege-Problem transformiert werden kann. Was sagt dies über die Komplexität des Knapsack-Problems aus?

47. Aufgabe **2+2+2+4 Punkte**

Seien $a_i \in \mathbb{Z}^n$ für $i = 1,\ldots,m$ und $b \in \mathbb{Z}^m$. Definiere

$$\begin{array}{rcl} P_I & = & \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n : a_i^T x \leq b_i \quad \forall i\} \\ P_I^i & = & \operatorname{conv}\{x \in \{0,1\}^n : a_i^T x \leq b_i\} \quad \forall i. \end{array}$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $P_I \subseteq \bigcap P_I^i$.

(2) Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem in (1) Ungleichheit vorliegt.

(3) $a_i \in \{ -1, 0, 1 \} \Longrightarrow P_I^i = \{ x : a_i^T x \leq b_i, 0 \leq x \leq \mathbb{1} \}$.

(4) Interpretieren Sie (1)–(3).

48. Aufgabe **10 Punkte**

Beschreiben Sie eine polynomiale Transformation des ganzzahligen Knapsack-Problems auf das 0/1-Knapsack-Problem.