Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

13. Übungsblatt

Abgabetermin: 4. Februar 1993 in der Übung

49. Aufgabe **10 Punkte**

Zur Erinnerung:

Problem: `PARTITION`.
Gegeben: n Zahlen $a_i \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$.
Frage: Gibt es $S \subseteq \{1, \ldots, n\} : \sum_{i \in S} a_i = b$?

Entwerfen Sie ein dynamisches Programm zur Lösung von Partition, beweisen Sie seine Korrektheit und ermitteln Sie seine Laufzeit.
Warum folgt aus Ihrem Resultat nicht $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$?

50. Aufgabe **10 Punkte**

Ein Papierfabrikant stellt Papierrollen mit einer Breite von d cm her, die Kunden fragen für $i = 1, \ldots, m$ jeweils b_i Rollen mit (geringerer) Breite a_i nach. Das `Cutting-Stock`-Problem ist die Aufgabe, diese Aufträge unter Verwendung einer minimalen Anzahl an Papierrollen zu erfüllen (vgl. Lineare Optimierung Aufgabe 30).
Das `Cutting-Stock`-Problem kann wie folgt als ganzzahliges lineares Programm formuliert werden. Zunächst ermitteln wir alle n Möglichkeiten, eine Rolle in kleinere Rollen aufzuteilen. Bezeichne $(a_{ij})_{i=1}^m$ die Anzahl an Rollen der Breite i, die in der j-ten Möglichkeit aus einer Ausgangsrolle geschnitten werden und $A = (a_{ij})$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \min\ \mathbb{1}^T x& \\ Ax &= b \\ x &\in \mathbb{N}_0^n \end{aligned} \tag{IP}$$

mit der LP-Relaxierung

$$\begin{aligned} \min\ \mathbb{1}^T x& \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned} \tag{LP}$$

die wir (optimal) lösen wollen. Dazu arbeiten wir statt mit n nur mit $k \ll n$ Spalten, o.B.d.A. nur mit den ersten k. Sei $(x_1^*, \ldots, x_k^*)$ bzw. $(\pi_1^*, \ldots, \pi_k^*)$ die Optimallösung des entsprechenden LPs bzw. seines Duals.
Zeigen Sie, wie man mit Hilfe eines Knapsack-Problems entweder die Optimalität von $(x_1^*, \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0)$ für (LP) feststellt oder eine Spalte $j > k$ mit negativen reduzierten Kosten findet.

51. Aufgabe **10 Punkte**

Sei Q ein $\mathcal{NP}$-hartes Maximierungsproblem, $\mathcal{I}$ die Menge der möglichen Inputs. Für die optimalen Zielfunktionswerte

$$c^* : \mathcal{I} \mapsto \mathbb{N}_0$$

gelte

$$0 \leq c^*(I) \leq p\big(\langle I \rangle\big) \qquad \forall I \in \mathcal{I},$$

wobei p ein Polynom sei.
Zeigen Sie, daß es genau dann ein `FPAS` für Q gibt, wenn $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gilt.

52. Aufgabe **10 Punkte**

Betrachten Sie die LP-Relaxierung des 0/1-Knapsack-Problems

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ a^T x \leq\ & \quad b \\ 0 \leq x \leq\ & \mathbb{1}. \end{aligned} \tag{KLP}$$

Wie üblich gelte

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

und sei das **kritische Element** s definiert als

$$s := \min \Big\{ i : \sum_{j=1}^{i} a_j > b \Big\}.$$

Zeigen Sie: Die Optimallösung x^* von (KLP) ist

$$x_i^* = \begin{cases} 1, & i < s \\ \frac{b - \sum_{i=1}^{s-1} a_i}{a_s} & i = s \\ 0, & i > s. \end{cases}$$