Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

14. Übungsblatt

Abgabetermin: 4. Februar 1993 in der Übung

53. Aufgabe **4+4+2 Punkte**

Das **Knospenspiel** ist ein Graphenmanipulationsspiel und funktioniert wie folgt. Zwei Spieler einigen sich auf eine Zahl n von Knoten. Diese werden in die Ebene gezeichnet. Die Spieler machen abwechselnd Züge. Ein Zug besteht aus der folgenden Operation. Der Spieler wählt zwei Knoten i und j und verbindet diese durch einen Weg der Länge zwei. Der Weg wird als Linie in die Ebene gezeichnet, wobei irgendwo auf der Linie ein neuer Knoten eingezeichnet wird. Die Knoten i und j dürfen dabei aber nur dann verbunden werden, wenn die neue Linie keine bereits gezeichnete kreuzt und weder von i noch von j mehr als drei Linien ausgehen; d.h. der Graph muß stets planar bleiben und darf keinen Knoten mit Grad größer als drei enthalten. Man darf auch einen Knoten, der höchstens Grad eins hat, mit sich selbst durch einen Weg der Länge 2 verbinden. Derjenige Spieler hat verloren, der keine neue Linie mehr zeichnen kann. Beweisen Sie, daß ein Knospenspiel mit n Knoten

(1) mindestens $2n$

(2) höchstens $3n - 1$

Spielzüge hat.

Hinweis: Der Beweis der unteren Schranke sollte die Planarität ausnutzen, z.B. die Eulersche Formal für zusammenhängende planare Graphen

$$n + f - m = 2,$$

wobei n die Knoten-, m die Kanten- und f die Flächenzahl des planaren Graphen ist.

(3) Konstruieren Sie Spielverläufe, bei denen obige Schranken genau erreicht werden.

54. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichten c_e für alle $e \in E$. Sei

$$d(v, k)$$

für alle $(v, k) \in V \times \{1, \ldots, n\}$ die Länge eines kürzesten $(1, v)$-Kantenzuges mit k Kanten.
Entwerfen Sie ein dynamisches Programm zur Ermittlung der Zahlen $d(v, k)$ und geben Sie seine Laufzeit an.
Wie kann man auch Kantenzüge der Längen $d(v, k)$ bestimmen?

55. Aufgabe **10 Punkte**

Formulieren Sie das `TSP` als dynamisches Programm.

56. Aufgabe **10 Punkte**

Auf den Kanten eines vollständigen Graphen $K_n = (V, E)$ sei eine nichtnegative Gewichtsfunktion c gegeben, die die Dreiecksungleichung erfüllt, d.h. es gilt

$$c_{uv} + c_{vw} \leq c_{uw} \qquad \forall u, v, w \in V.$$

Zeigen Sie, daß es für $S \subseteq V$ einen gewichtsminimalen Steinerbaum T gibt (d. h. einen Baum $T \subseteq E$, der die Knoten in S verbindet), der höchstens $|S| - 2$ Steinerpunkte (Knoten in $V \setminus S$) erreicht.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß es einen minimalen Steinerbaum gibt, der an jedem Steinerpunkt mindestens den Grad 3 hat.

Alles Gute und viel Erfolg im weiteren Studium

Matthias Müller-Hannemann Ralf Borndörfer Martin Grötschel