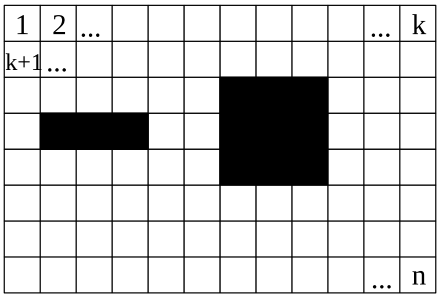
Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

4. Übungsblatt

Abgabetermin: 12. November 1992 in der Übung

13. Aufgabe **10 Punkte**
Beim Chip-Entwurf (VLSI-Design) in der sogenannten *Sea of Gates Technologie* tritt das folgende Plazierungsproblem auf. Gegeben ist ein *Master-Chip*, dessen Fläche in n Einbauplätze aufgeteilt ist, die auf kanonische Weise durchnumeriert sind. Alle Einbauplätze haben dieselbe Größe (üblicherweise sind es Quadrate oder Standardrechtecke), siehe Bild.



Ferner sind z Zellen (oder *Modulen*) gegeben, die gewisse logische Funktionen ausführen. Alle Zellen haben Standard-Rastergrößen. Sie sind rechteckig und überdecken exakt eine gewisse Anzahl von Einbauplätzen; zum Beispiel können sie quadratisch sein mit der Größe von 4 oder 9 Einbauplätzen, oder rechteckig mit der Höhe eines und der Länge von 3 Einbauplätzen. Eine extrem wichtige Aufgabe ist, die z Zellen so auf den Master-Chip zu plazieren, daß die Verbindungsnetze günstig verdrahtet werden können, gewisse Affinitäten berücksichtigt werden und einige weitere Kriterien erfüllt werden. All diese Optimalitäts- und Technologiekriterien sollen hier unberücksichtigt bleiben.
Ihre Aufgabe: Stellen Sie ein ganzzahliges Programm (ohne Zielfunktion) auf, das genau dann eine Lösung besitzt, wenn die z Zellen überlappungsfrei auf dem Master-Chip plaziert werden können.

14. Aufgabe **5+5 Punkte**

(1) Zeigen Sie, wie sich die Menge aller aufspannenden Arboreszenzen als Durchschnitt der Basissysteme zweier Matroide schreiben läßt.

(2) Schreiben Sie für $u, v \in V$ mit $u \neq v$ die Menge der hamiltonschen Wege von u nach v als Durchschnitt der Basisfamilien dreier Matroide.

15. Aufgabe **10 Punkte**
Produziert der folgende Algorithmus ein gewichtsmaximales Branching? Falls nicht, versuchen Sie ein Beispiel anzugeben, bei dem der Algorithmus möglichst schlecht abschneidet.
Input: Digraph $D = (V, A)$ mit Bogengewichten $c(a)$ für alle $a \in A$.
Output: Ein Branching B in D.
Algorithmus:

1. Numeriere die Bögen von D, so daß $c_{a_1} \geq c_{a_2} \geq \ldots \geq c_{a_m}$ gilt.
2. Setze $B := \emptyset$.
3. `FOR` $i = 1$ `TO` m `DO`

   Falls $c_{a_i} > 0$ und $B \cup \{ a_i \}$ ein Branching ist, setze $B := B \cup \{ a_i \}$.
4. Gib B aus.

16. Aufgabe **5+5 Punkte**

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Sei $G = (V, E)$ ein vollständiger Graph auf n Knoten. Alle maximal unabhängigen Mengen im Unabhängigkeitssystem

$$\mathcal{I} = \left\{ I \subseteq E : I \subseteq T \text{ Tour} \right\}$$

haben die gleiche Kardinalität n. $(E, \mathcal{I})$ ist deshalb ein Matroid.

(2) Sei $r : 2^E \to \mathbb{N}_0$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften.

(1) $r(F) \leq |F| \qquad \forall F \subseteq E$

(2) $F \subseteq G \Longrightarrow r(F) \leq r(G) \qquad \forall F, G \subseteq E$

(3) $r(F) \leq r(F_1) + r(F_2) \qquad \forall F_1 \,\dot{\cup}\, F_2 = F \subseteq E$

Dann ist r die Rangfunktion eines Unabhängigkeitssystems und insbesondere stark subadditiv.