Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

5. Übungsblatt

Abgabetermin: 19. November 1992 in der Übung

17. Aufgabe **5 Punkte**

Zwei Matroide $(\mathcal{I}, E)$ und $(\mathcal{J}, F)$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : E \to F$ mit der Eigenschaft

$$\phi(G) \in \mathcal{J} \iff G \in \mathcal{I}$$

gibt.
Zeigen Sie, daß jedes graphisches Matroid isomorph zu einem Matrixmatroid über dem zweielementigen Körper F_2 ist.

18. Aufgabe **5+5+5 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger Graph. Mit

$$\mathcal{M}(G) := \{\, M \subseteq E \mid M \text{ Matching} \,\}$$

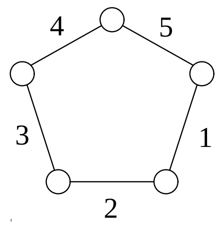
bezeichnen wir das Unabhängigkeitssystem der Matchings in G.

(1) Sei G bipartit. Zeigen Sie, daß $\mathcal{M}(G)$ im allgemeinen kein Matroid ist, aber als Durchschnitt der Unabhängigkeitssysteme zweier Matroide dargestellt werden kann.

(2) Zeigen Sie, daß für alle Graphen G für den Rangquotienten $q\big(\mathcal{M}(G)\big)$ des Unabhängigkeitssystems $\mathcal{M}(G)$ gilt:

$$q\big(\mathcal{M}(G)\big) \geq \tfrac{1}{2}.$$

(3) Zeigen Sie, daß $\mathcal{M}(G)$ für den folgenden Graphen G nicht als Durchschnitt von weniger als drei Matroiden dargestellt werden kann.



Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des Zirkuitaustauschaxioms, daß die beiden minimal abhängigen Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ nicht beide Zirkuits eines Matroids $(E, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{M}(G) \subseteq \mathcal{I}$ sein können.

19. Aufgabe **5+5 Punkte**

Sei $\mathcal{B}$ das Basis-System eines Matroids M auf einer Grundmenge E.

(1) Zeigen Sie, daß der Greedy-Max-Algorithmus das folgende Bottleneck-Problem für $c \geq 0$ optimal löst:

$$\max_{B \in \mathcal{B}} \min_{i \in B} c(i).$$

(2) Zeigen Sie, daß der Greedy-Min-Algorithmus für beliebige Gewichte c das folgende Bottleneck-Problem optimal löst:

$$\min_{B \in \mathcal{B}} \max_{i \in B} c(i).$$

20. Aufgabe **5+5 Punkte**

Für das Problem, gegebene DM-Beträge mit möglichst wenigen Münzen und Scheinen auszuzahlen, wird der Greedy-Algorithmus angewendet, der für den jeweils zu zahlenden Restbetrag immer die größtmögliche Münze bzw. den größtmöglichen Schein auszahlt und dann iteriert.

(1) Zeigen Sie, daß der Greedy-Algorithmus optimal arbeitet.

(2) Gilt dies immer noch, wenn zusätzlich 30-Pfennig-Münzen bzw. 40PfennigMünzen eingeführt würden? Wie groß wird der maximale Fehler?