Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

8. Übungsblatt

Abgabetermin: 17. Dezember 1992 im Tutorenbriefkasten

29. Aufgabe **2+2 Punkte**

Reduzieren Sie die folgenden Flußprobleme auf das Max-Flow-Problem der Vorlesung.

(1) Zusätzlich zu den Bogenkapazitäten sind auch Knotenkapazitäten $d(v)$ gegeben.

(2) Es sind von Null verschiedene untere Bogenkapazitäten gegeben.

30. Aufgabe **6+6 Punkte**

Ein **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Kantenmenge $M \subseteq E$, so daß je zwei Kanten aus M keinen gemeinsamen Endknoten haben. Eine **Knotenüberdeckung** von G ist eine Knotenmenge $W \subseteq V$, so daß jede Kante aus G mindestens einen Knoten aus W als Endknoten hat. Das **bipartite Matching-Problem** ist die Aufgabe, in einem bipartiten Graphen ein maximales Matching zu finden.

(1) Beweisen Sie Satz 7.25 der Vorlesung.

(2) Beweisen Sie mit Hilfe der Konstruktion von Satz 7.25 der Vorlesung **König's Matching-Satz**: In einem bipartiten Graphen ist die größte Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.

31. Aufgabe **10 Punkte**

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph und $x \in \mathbb{N}_0^A$ ein (s,t)-Fluß in D vom Wert v. Dann gibt es (s,t)-Wege P_i für $1 \leq i \leq w$ und eine Anzahl von gerichteten Kreisen C_j in D mit der Eigenschaft

$$x = \sum_{i=1}^{w} \chi(P_i) + \sum \chi(C_j)$$

wobei $\chi(P_i) \in \{0,1\}^A$ bzw. $\chi(C_j) \in \{0,1\}^A$ jeweils den Inzidenzvektor von P_i bzw. C_j bezeichne.

32. Aufgabe **6+6+4 Punkte**

Beim Max-Flow-Algorithmus von Ford & Fulkerson werde der Fluß jeweils entlang augmentierender Wege kürzester Länge erhöht.

Für alle Iterationsschritte i und alle Knoten v bezeichne $d^i(v)$ die Länge eines kürzesten augmentierenden (s,v)-Weges. Liegt a auf dem augmentierenden Weg und gilt nach der Augmentation

$$x_a = c_a \qquad \text{oder} \qquad x_a = 0,$$

so nennen wir a durch die Augmentation **saturiert**.

Zeigen Sie:

(1) $d^i \leq d^{i+1}$.

(2) Jeder Bogen wird höchstens $n/2$ mal saturiert.

(3) Der Max-Flow-Algorithmus von Ford & Fulkerson mit Augmentierung entlang kürzester Wege ist polynomial.

Der Abgabetermin für die Aufgabe 21 wird auf den 10. Dezember verlängert.