Technische Universität Berlin
Fachbereich 3 Mathematik
WS92/93
Martin Grötschel
Ralf Borndörfer
16. Oktober 1997

Kombinatorische Optimierung

9. Übungsblatt

Abgabetermin: 7. Januar 1993 in der Übung

33. Aufgabe **3+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 Punkte**
Programmieren Sie einen Algorithmus zur Bestimmung eines Min-Cost-Flows in einem Digraphen. Programmieren Sie eine entsprechende Funktion/Prozedur `mcf` sowie ein zugehöriges Testprogramm. Dokumentieren Sie die Funktionsweise und die Laufzeit Ihres Algorithmus, Ihre Implementierungsüberlegungen und insbesondere die Schnittstelle ihrer Routine. Geben Sie ein Listing ihres Programmes und einen sinnvollen Ausdruck Ihrer Testergebnisse ab. Mailen Sie Ihr Programm an lop-001 und lop-002. Testen Sie Ihr Programm an den Testbeispielen der Aufgabe 21 auf der `SONY`.
Abgabetermin für diese Aufgabe: 14. Januar in der Übung.

34. Aufgabe **10 Punkte**
Sie besitzen eine Flotte von Tankern, mit denen Sie Erdöl von den Häfen A und B nach C und D transportieren. Folgende Aufträge liegen vor:

Auftrag	Start	Ziel	Auslieferungsdatum	Gewinn
1	A	C	3	10
2	A	C	8	10
3	B	D	3	4
4	B	C	6	3

Akzeptieren Sie einen Auftrag, so müssen Sie genau zum Auslieferungsdatum liefern, da in der Erdölindustrie Raffineriekapazität sehr wertvoll ist. Ferner entstehen Ihnen pro eingesetztem Tanker Fixkosten von 4 Einheiten.
Die beiden folgenden Tabellen geben die Fahrzeiten der Tanker von A und B nach C oder D inklusive Be- und Entladezeit und die Rückfahrzeiten an.

		Nach	
		C	D
Von	A	3	2
	B	2	3

		Nach	
		A	B
Von	C	2	1
	D	1	2

Modellieren Sie das Problem, einen Tankereinsatzplan mit maximalem Gewinn zu finden, als Min-Cost-Flow Problem.

35. Aufgabe **10 Punkte**
Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit unteren und oberen Schranken $l_a \leq u_a$ für alle Bögen a. Ein Fluß x vom Wert 0 in D mit der Eigenschaft $l \leq x \leq u$ heißt **Zirkulation**.
Zeigen Sie: In D existiert genau dann eine Zirkulation, wenn für alle Knotenmengen $W \subseteq V, \emptyset \neq W \neq V$

$$\sum_{(i,j)\in\delta^-(W)} l_{ij} \leq \sum_{(i,j)\in\delta^+(W)} u_{ij}$$

gilt.

36. Aufgabe **10 Punkte**

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ heißt **total unimodular**, falls die Determinanten aller Minoren den Wert 0, 1 oder -1 haben (vgl. Aufgabe 31 zur Linearen Optimierung).
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Sei $D = (V, A)$ ein Digraph. Dann ist die zum folgenden Gleichungssystem gehörende Matrix total unimodular:

$$x\big(\delta^{+}(v)\big) - x\big(\delta^{-}(v)\big) = 0 \qquad \forall v \in V.$$

(2) Die Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix eines bipartiten Graphen ist total unimodular.

(3) Ist A total unimodular, dann auch A^T, $-A$, $(A, -A)$, (I, A), $(I, -I, A, -A)$ und A^{-1} (falls A regulär ist).

(4) Sind A und B total unimodular, ist dann auch (A, B) total unimodular?