



Nichtlineare Approximationstheorie und adaptive Algorithmen

Anton Schiela

Disputationsvortrag

Berlin, 1.11. 2006



Thematik



Adaptivität

- Eines der Grundkonzepte moderner Numerik
- Sicherere und effizientere Methoden
- Auflösung „lokaler Effekte“

Approximationstheorie

- Eine der Grundlagen der numerischen Analysis
- Liefert Konvergenzraten
- Lineare und nichtlineare Approximationstheorie



Thematik



Adaptivität

- Eines der Grundkonzepte moderner Numerik

• Sicherere und effizientere Methoden

• "Flöhen lokaler Effekte"

**“Nichtlineare Approximationstheorie
trägt zu einem besseren Verständnis
adaptiver Algorithmen bei“**

Approximationstheorie

• Eine der Grundlagen der numerischen Analysis

- Liefert Konvergenzraten
- Lineare und nichtlineare Approximationstheorie



Grundaufgabe: Approximation



Normierter Funktionenraum: $(X, \|\cdot\|_X)$

Folge von Teilräumen: $X_n \subset X \quad n=1,2,3\dots$

linear

X_n ist ein linearer Raum

Stückweise Polynome auf
uniformen Gittern

nichtlinear

X_n ist **kein** linearer Raum

Stückweise Polynome auf
adaptiven Gittern

Approximationsfehler: $f \in X \quad E_n(f)_X = \inf_{p \in X_n} \|f - p\|_X$



Anwendungen



Approximation von bekannten Funktionen

- Signalverarbeitung
- Verlustbehaftete Datenkompression

Klassische Numerik

- Numerische Quadratur
- Kollokationsmethoden
- Finite Elemente Methoden



Beispiel: Numerische Quadratur



Integral über approximierende Polynome:

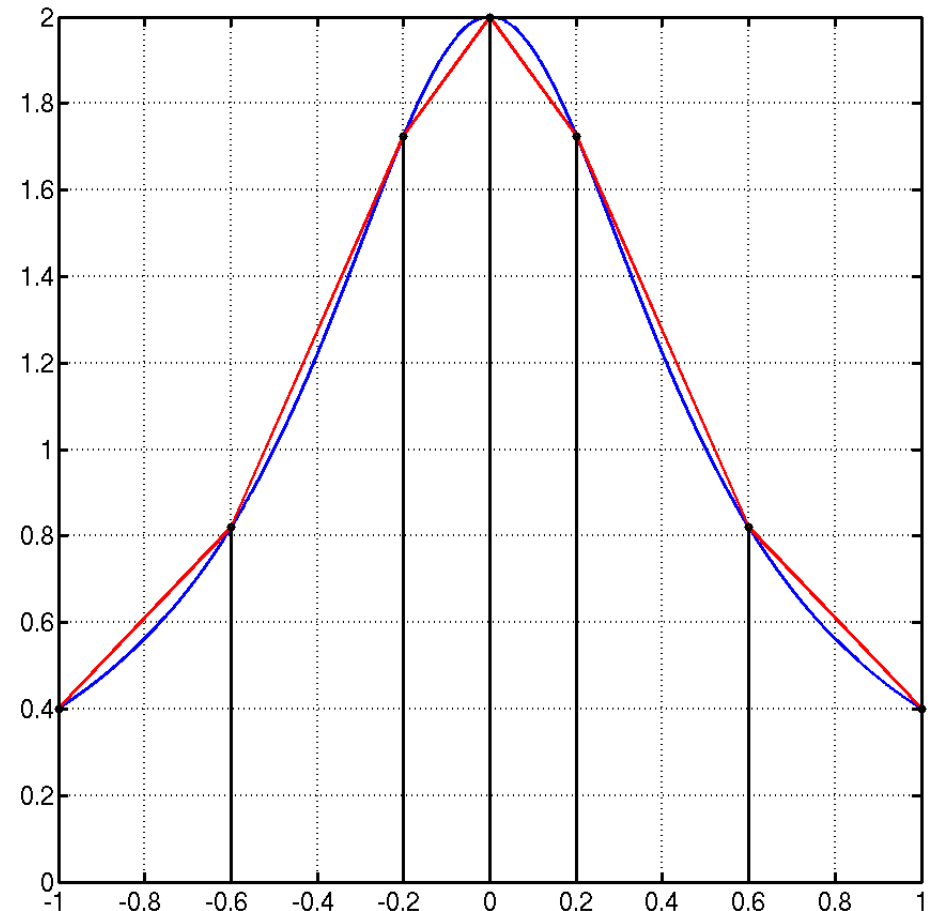
$$\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 p(x) dx$$

Schätze Integralfehler durch
Approximationsfehler ab:

$$\left| \int_0^1 f(x) - p(x) dx \right| \leq \|f - p\|_{L_1([0,1])}$$

Stückweise Polynome:

$$\int_0^1 p(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} q_i(x) dx$$





Uniformes Gitter



Alle Teilintervalle gleich groß: $h=1/n$ $x_i=i \cdot h$

X_n = stückweise Polynome auf festem Gitter

Analysis: **Lineare** Approximationstheorie in $X=L_1([0,1])$:

$$\|f - q_i\|_{L_1([x, x+h])} \leq C \|f^{(r)}\|_{L_1([x, x+h])} h^r$$



Uniformes Gitter



Alle Teilintervalle gleich groß: $h=1/n$ $x_i=i \cdot h$

X_n = stückweise Polynome auf festem Gitter

Analysis: **Lineare** Approximationstheorie in $X=L_1([0,1])$:

$$\|f - q_i\|_{L_1([x, x+h])} \leq C \|f^{(r)}\|_{L_1([x, x+h])} h^r$$

Fehler aufsummieren:

$$E_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f - q_i\|_{L_1([x_i, x_{i+1}])} \leq \sum_{i=0}^{n-1} C \|f^{(r)}\|_{L_1([x_i, x_{i+1}])} h^r$$



Uniformes Gitter



Alle Teilintervalle gleich groß: $h=1/n$ $x_i=i \cdot h$

X_n = stückweise Polynome auf festem Gitter

Analysis: **Lineare** Approximationstheorie in $X=L_1([0,1])$:

$$\|f - q_i\|_{L_1([x, x+h])} \leq C \|f^{(r)}\|_{L_1([x, x+h])} h^r$$

Fehler aufsummieren:

$$E_n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f - q_i\|_{L_1([x_i, x_{i+1}])} \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} C \|f^{(r)}\|_{L_1([x_i, x_{i+1}])} \right) h^r \leq C \|f^{(r)}\|_{L_1([0,1])} n^{-r}$$



Uniformes Gitter



Alle Teilintervalle gleich groß: $h=1/n$ $x_i=i \cdot h$

X_n = stückweise Polynome auf festem Gitter

Analysis: **Lineare** Approximationstheorie in $X=L_1([0,1])$:

$$E_n(f) \leq C \left\| f^{(r)} \right\|_{L_1([0,1])} n^{-r}$$

„Jackson–Ungleichung“



Adaptives Gitter



Suche ein der Funktion *angepasstes* Gitter

Ziel: Äquilibrierung des Fehlers

X_n = stückweise Polynome auf Gitter mit frei wählbaren Punkten

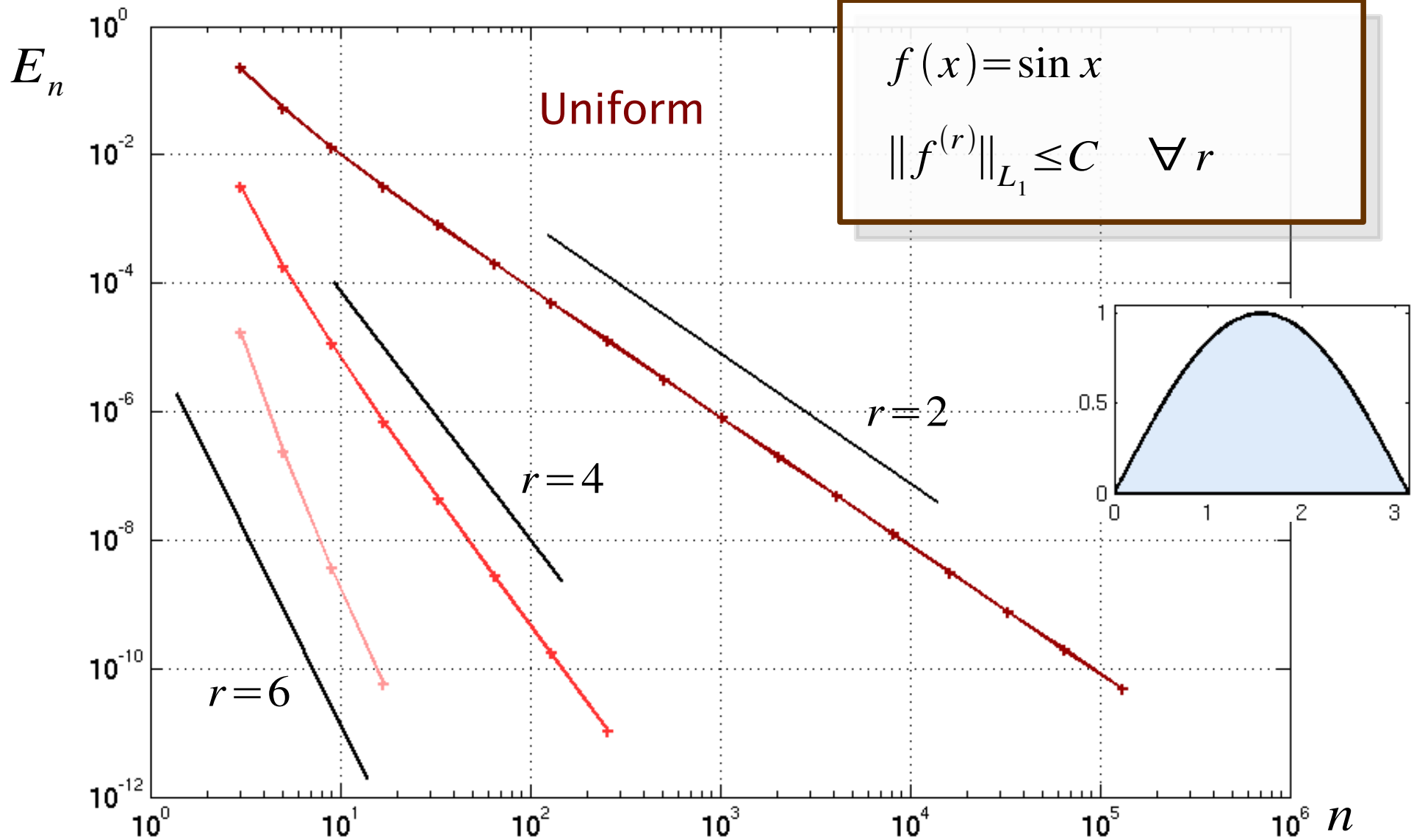
Analysis: **Nichtlineare** Approximationstheorie in $X = L_1([0,1])$

$$E_n(f) \leq C \|f\|_{A^r} n^{-r} \quad A^r = ?$$

„Jackson–Ungleichung“

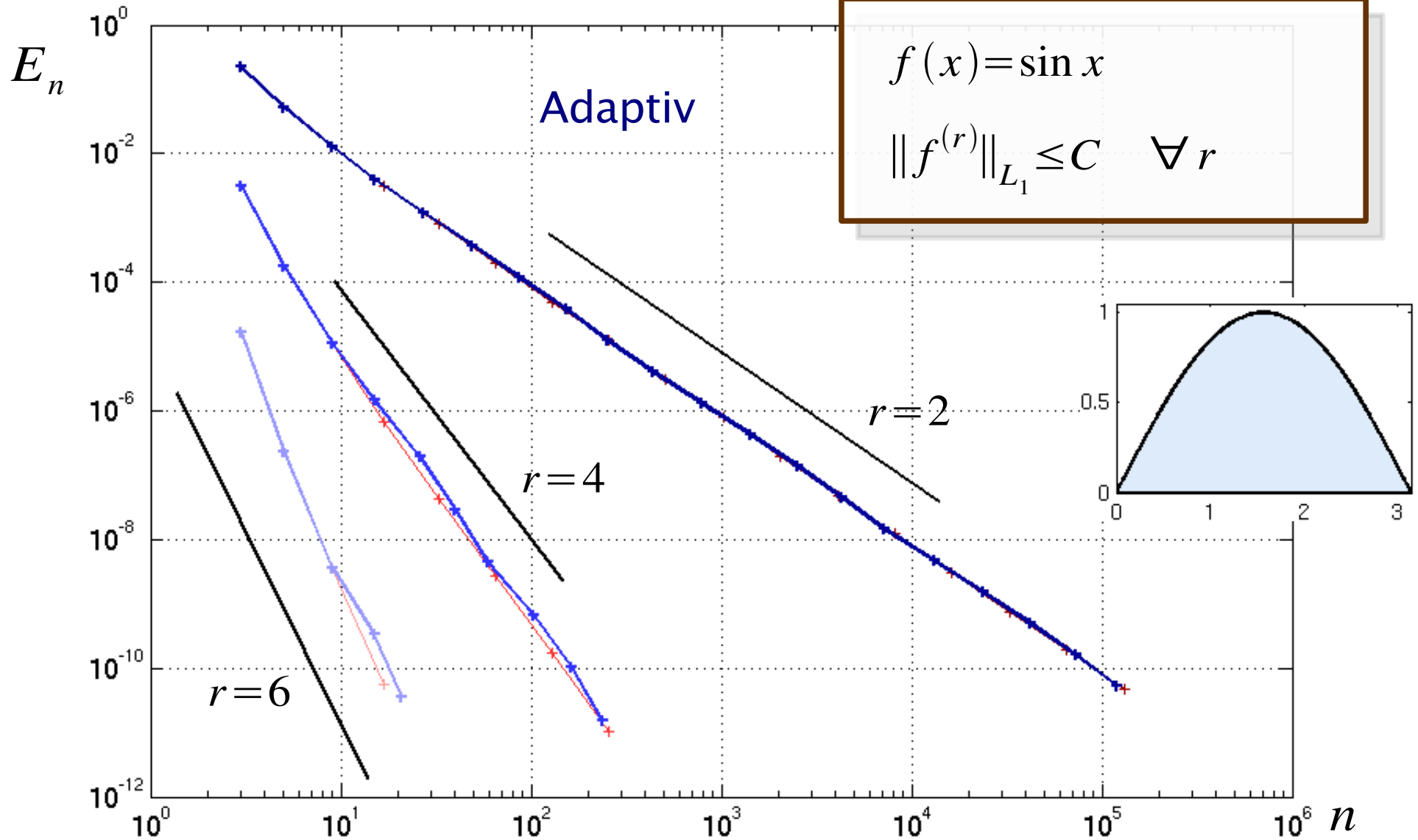


Numerisches Beispiel



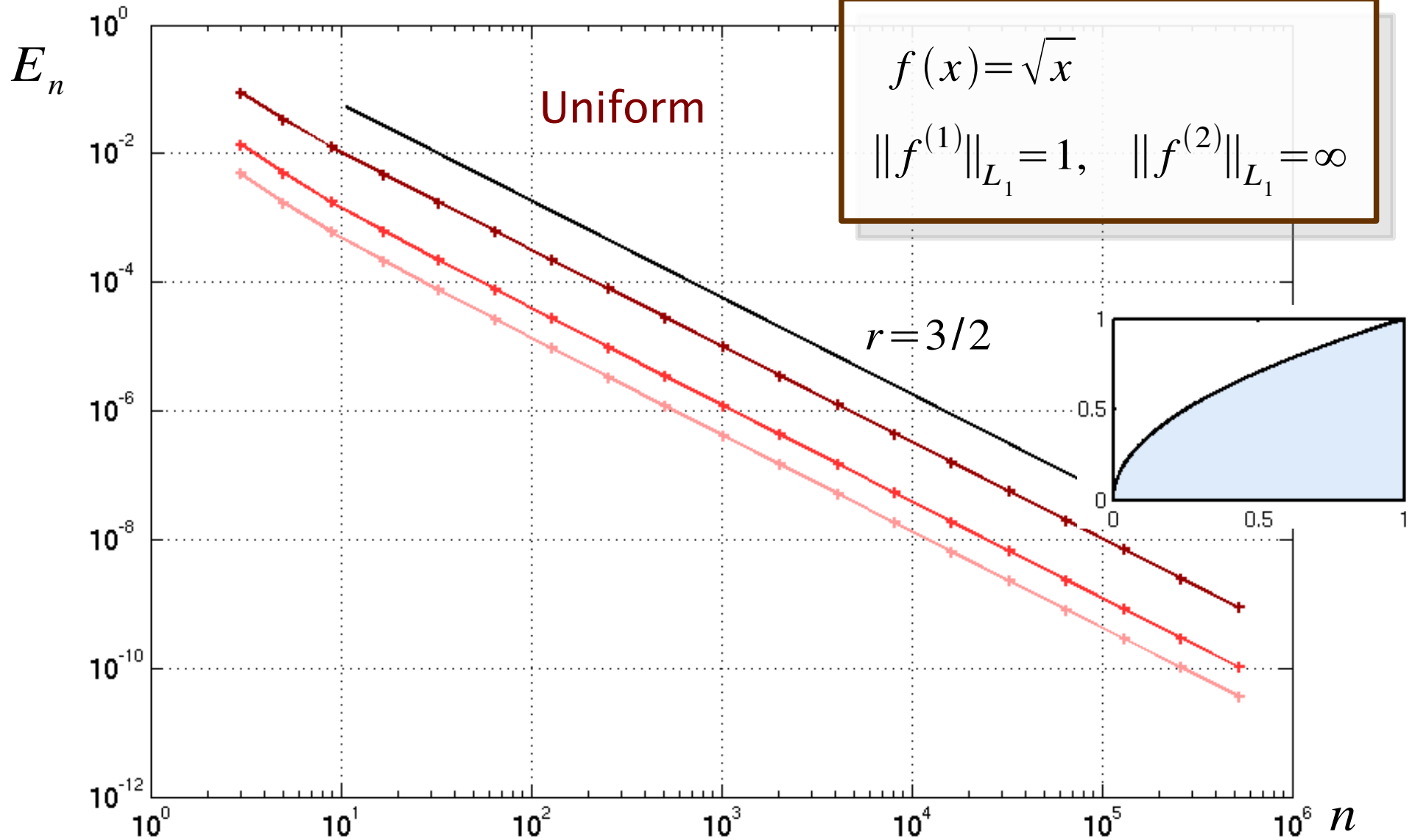


Numerisches Beispiel



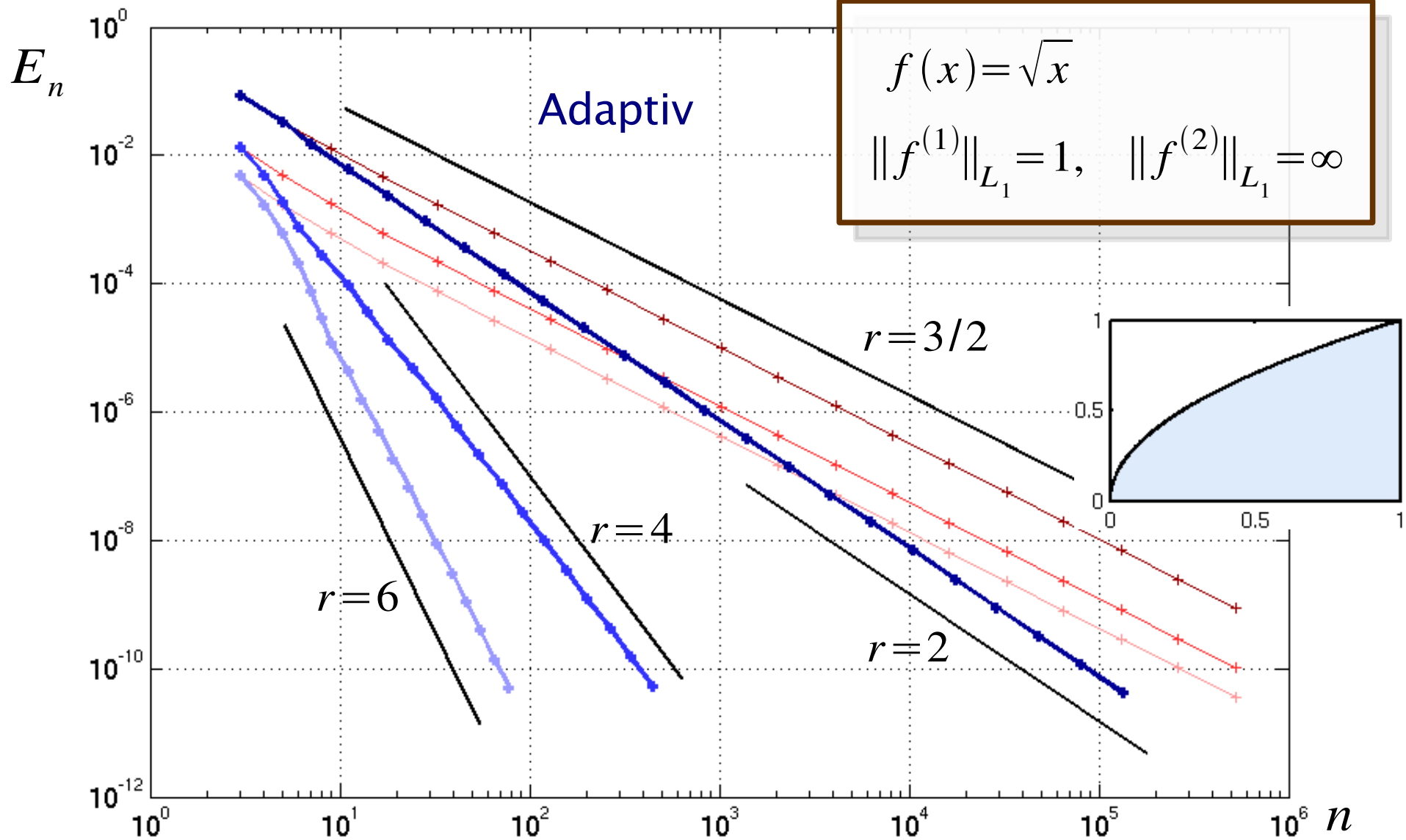


Numerisches Beispiel





Numerisches Beispiel





Beobachtungen



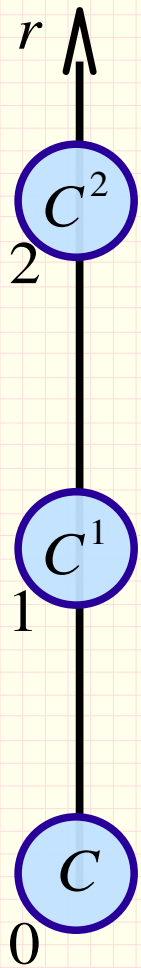
	$\sin x$	\sqrt{x}
uniform	volle Ordnung	$r \leq 3/2$
adaptiv	volle Ordnung	volle Ordnung

Fragestellungen:

- Erklärung für gebrochene Ordnung
- **Systematische Analyse der adaptiven Methode**



Beschränkte Ableitungen



Differenzierbare Funktionen

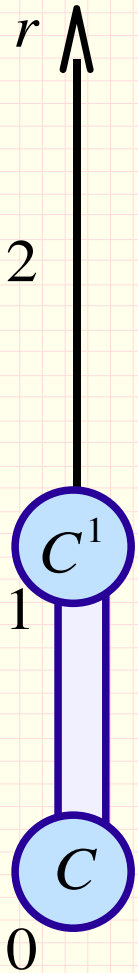
$$|f|_{C^r} = \|f^{(r)}\|_{\infty} = \sup_{x \in I} |f^{(r)}(x)|$$

$$\|f\|_{C^r} = \|f\|_{\infty} + |f|_{C^r}$$

$$r = 0, 1, 2, 3, \dots$$



Beschränkte Finite Differenzen



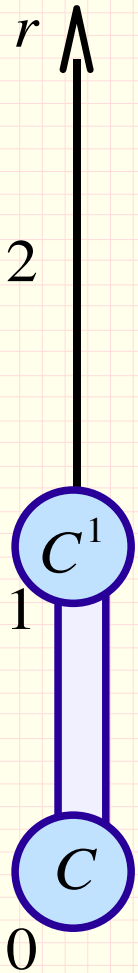
Hölderstetige Funktionen

$$|f(y) - f(x)| \leq c |y - x|^r$$

$r < 1$



Beschränkte Finite Differenzen



Hölderräume

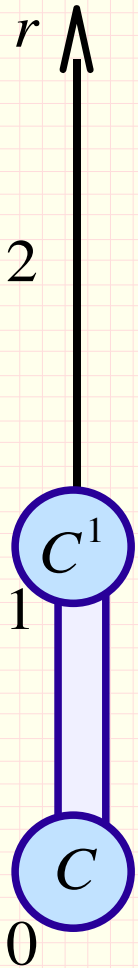
$$|f(y) - f(x)| \leq c |y - x|^r$$

$$(\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$|f|_{\tilde{C}^r} = \sup_h \frac{\|\Delta_h f\|_\infty}{|h|^r} \quad r < 1$$



Beschränkte Finite Differenzen



Hölderräume

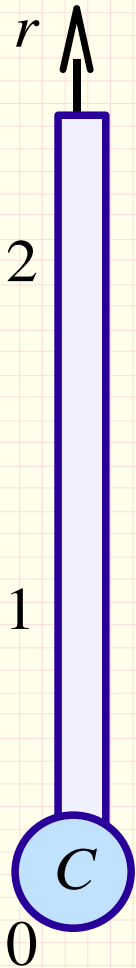
$$|f(y) - f(x)| \leq c |y - x|^r$$

$$(\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$|f|_{\tilde{C}^r} = \left\| \left\| \Delta_h f \right\|_{\infty} h^{-r} \right\|_{\infty} \quad r < 1$$



Beschränkte Finite Differenzen



Hölder-Zygmund-Räume

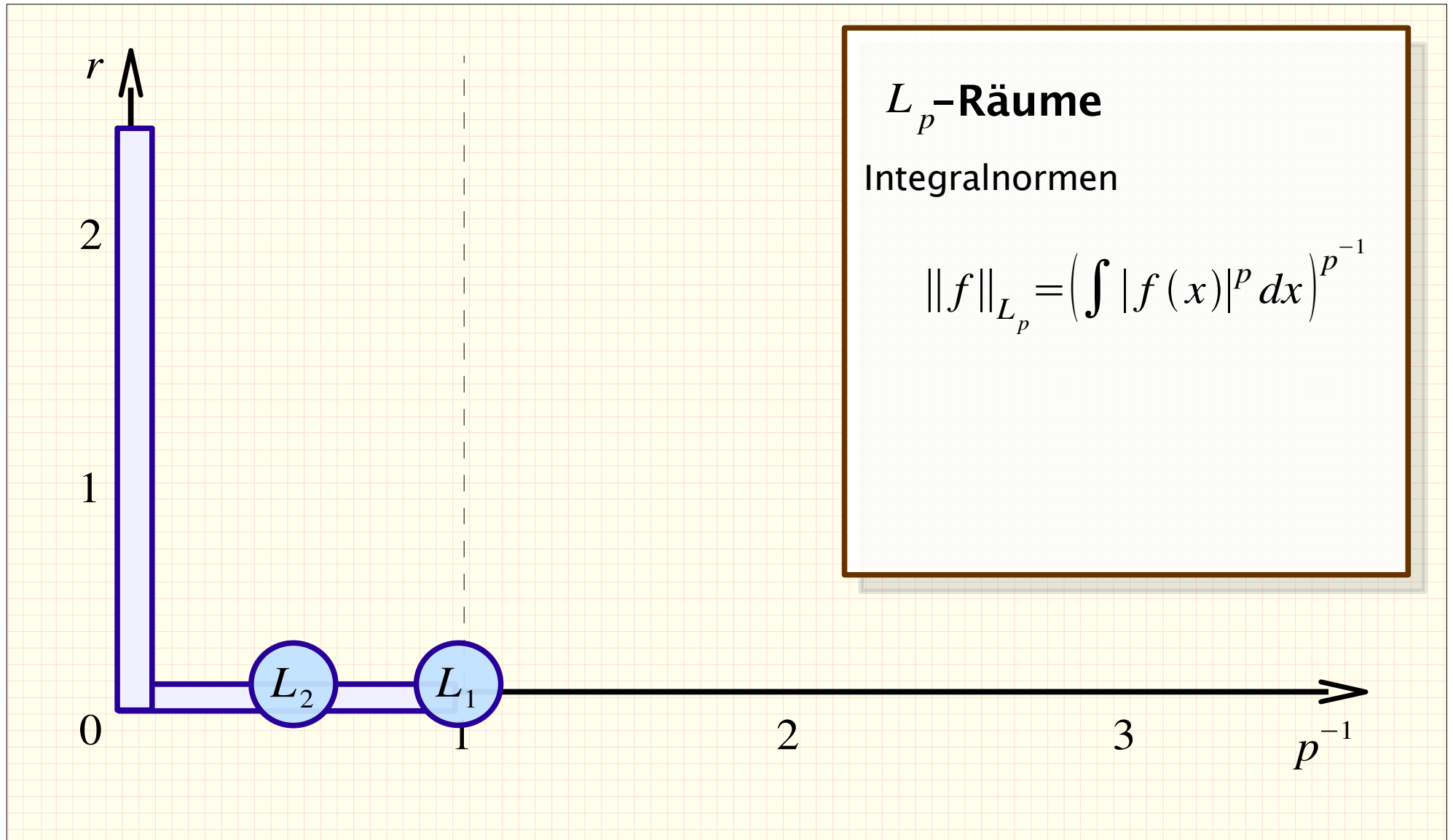
$$(\Delta_h f)(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta_h^m f = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f)$$

$$|f|_{\tilde{C}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{\infty} h^{-r} \right\|_{\infty} \quad r < m$$

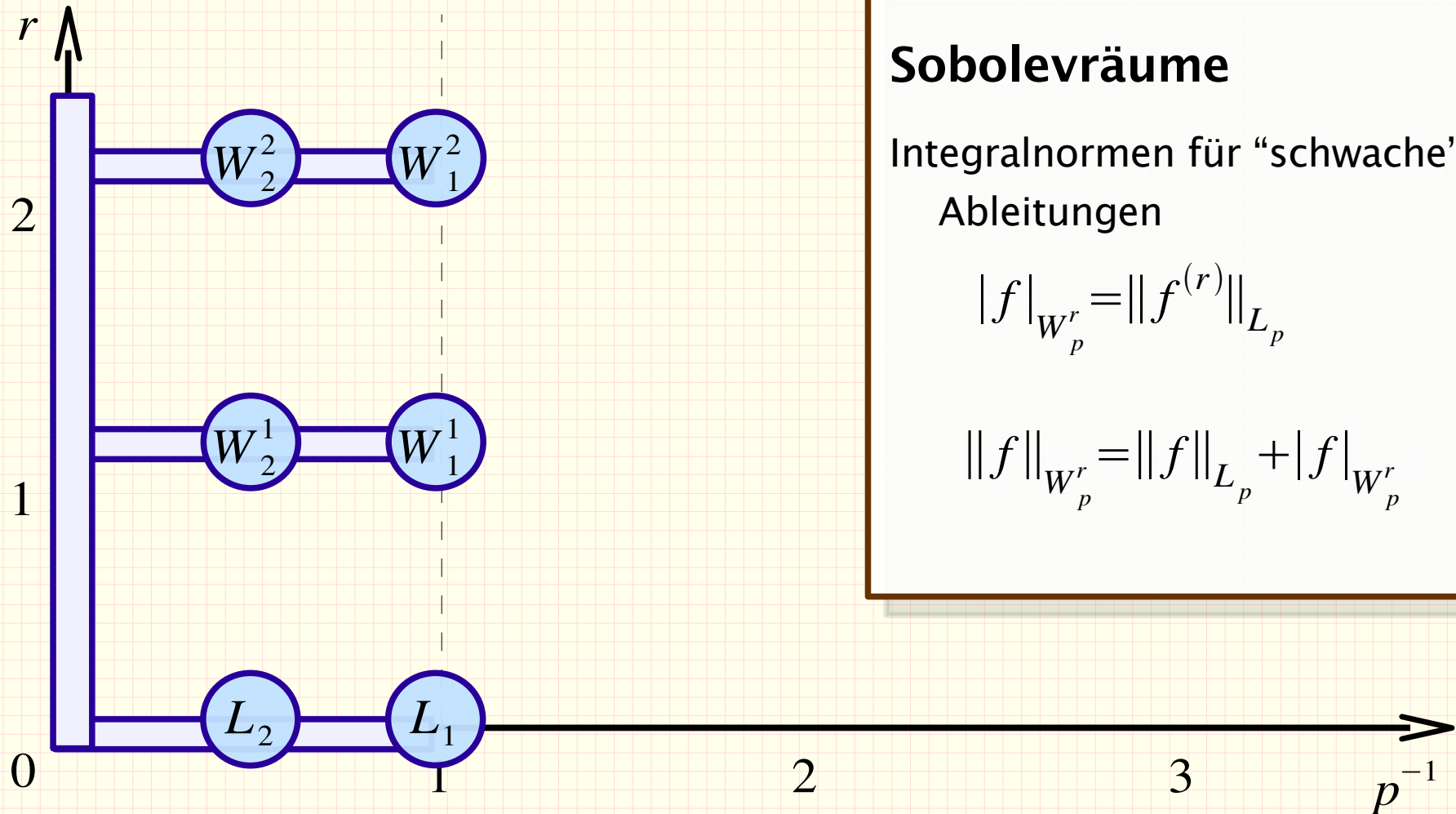


Integrierbare Funktionen



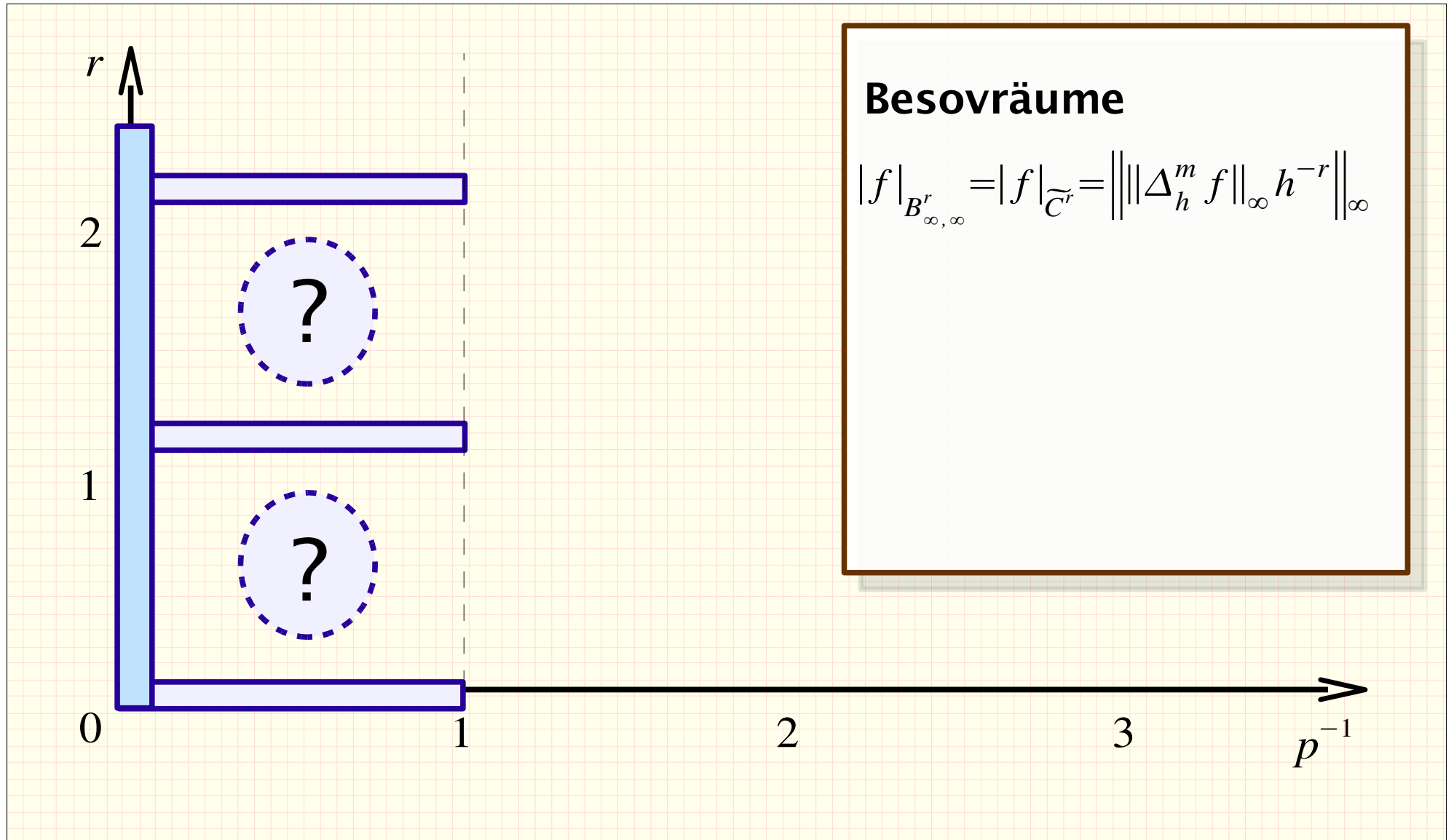


Integrierbare Ableitungen



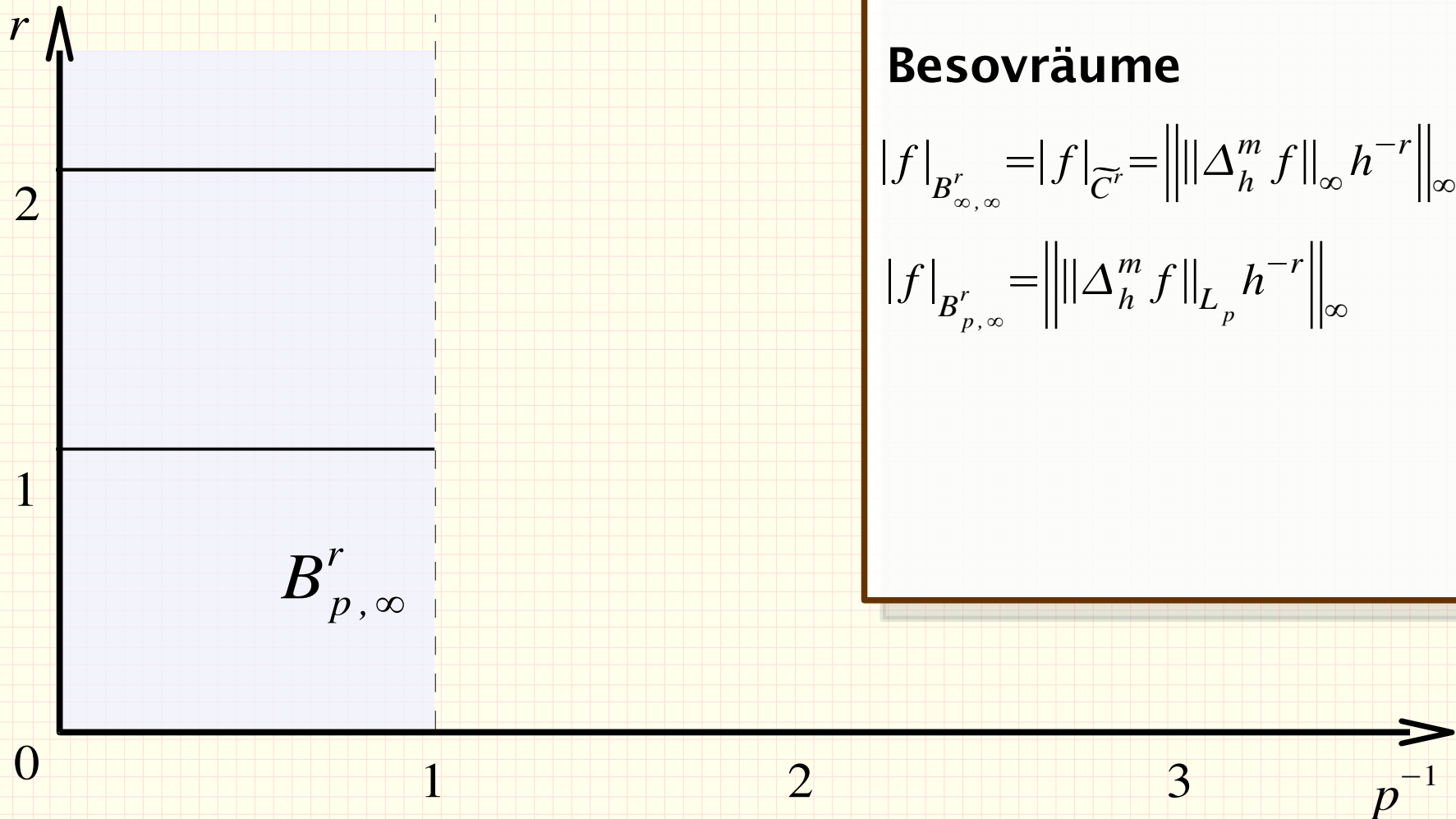


Integrierbare Finite Differenzen





Integrierbare Finite Differenzen



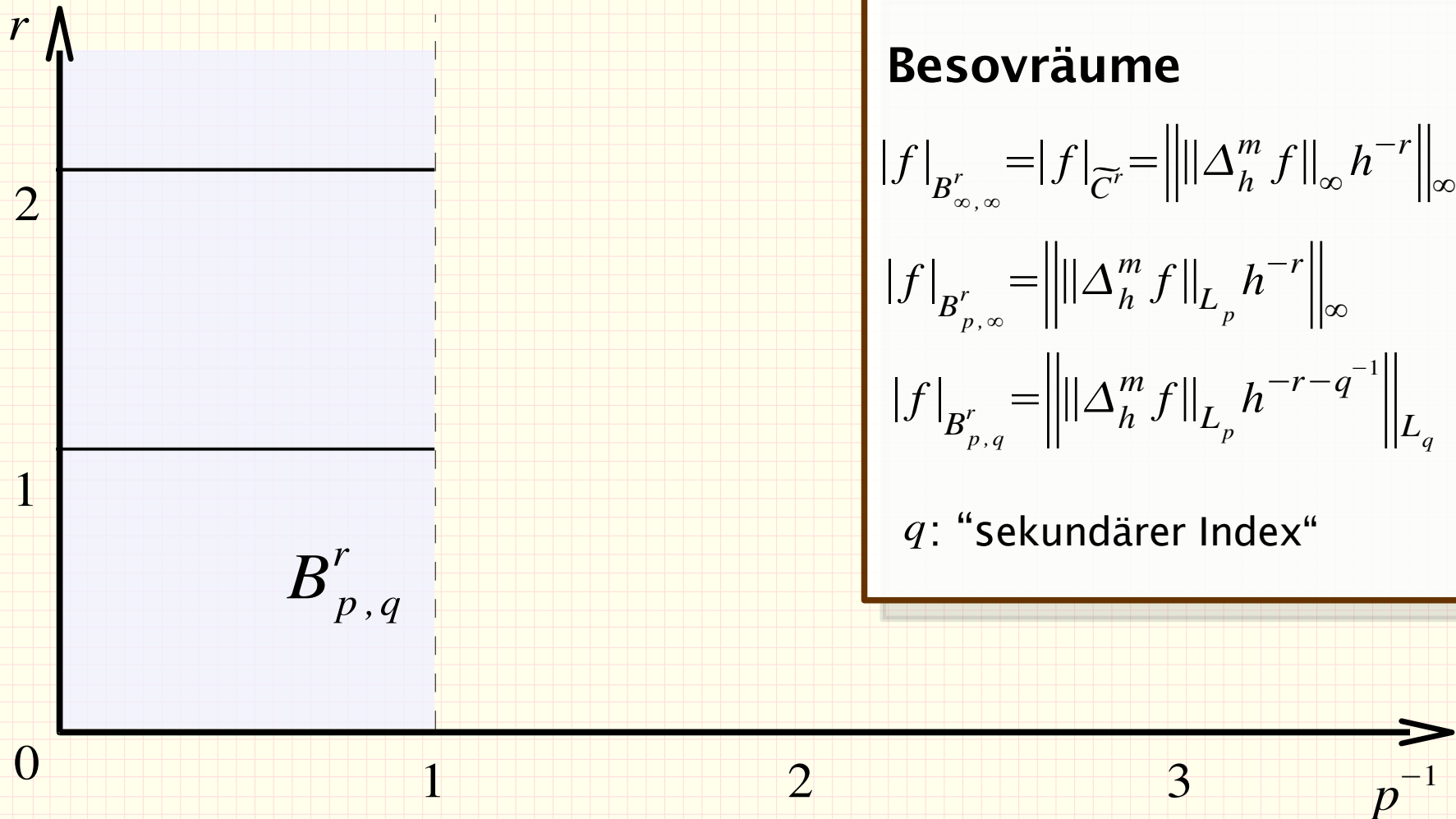
Besovräume

$$|f|_{B_{\infty, \infty}^r} = |f|_{\tilde{C}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{\infty} h^{-r} \right\|_{\infty}$$

$$|f|_{B_{p, \infty}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{L_p} h^{-r} \right\|_{\infty}$$



Integrierbare Finite Differenzen



Besovräume

$$|f|_{B_{\infty,\infty}^r} = |f|_{\tilde{C}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{\infty} h^{-r} \right\|_{\infty}$$

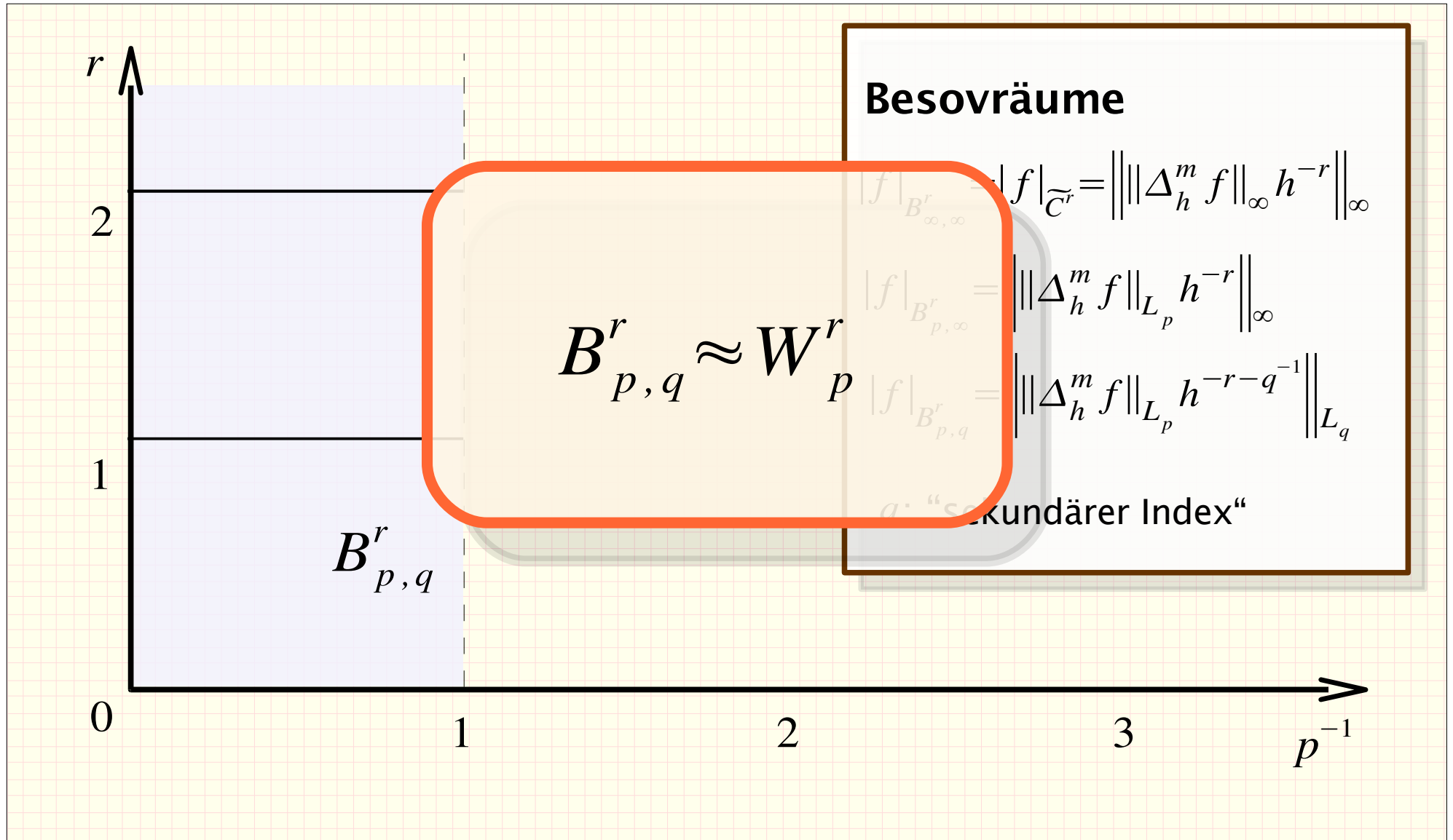
$$|f|_{B_{p,\infty}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{L_p} h^{-r} \right\|_{\infty}$$

$$|f|_{B_{p,q}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{L_p} h^{-r-q^{-1}} \right\|_{L_q}$$

q : "sekundärer Index"

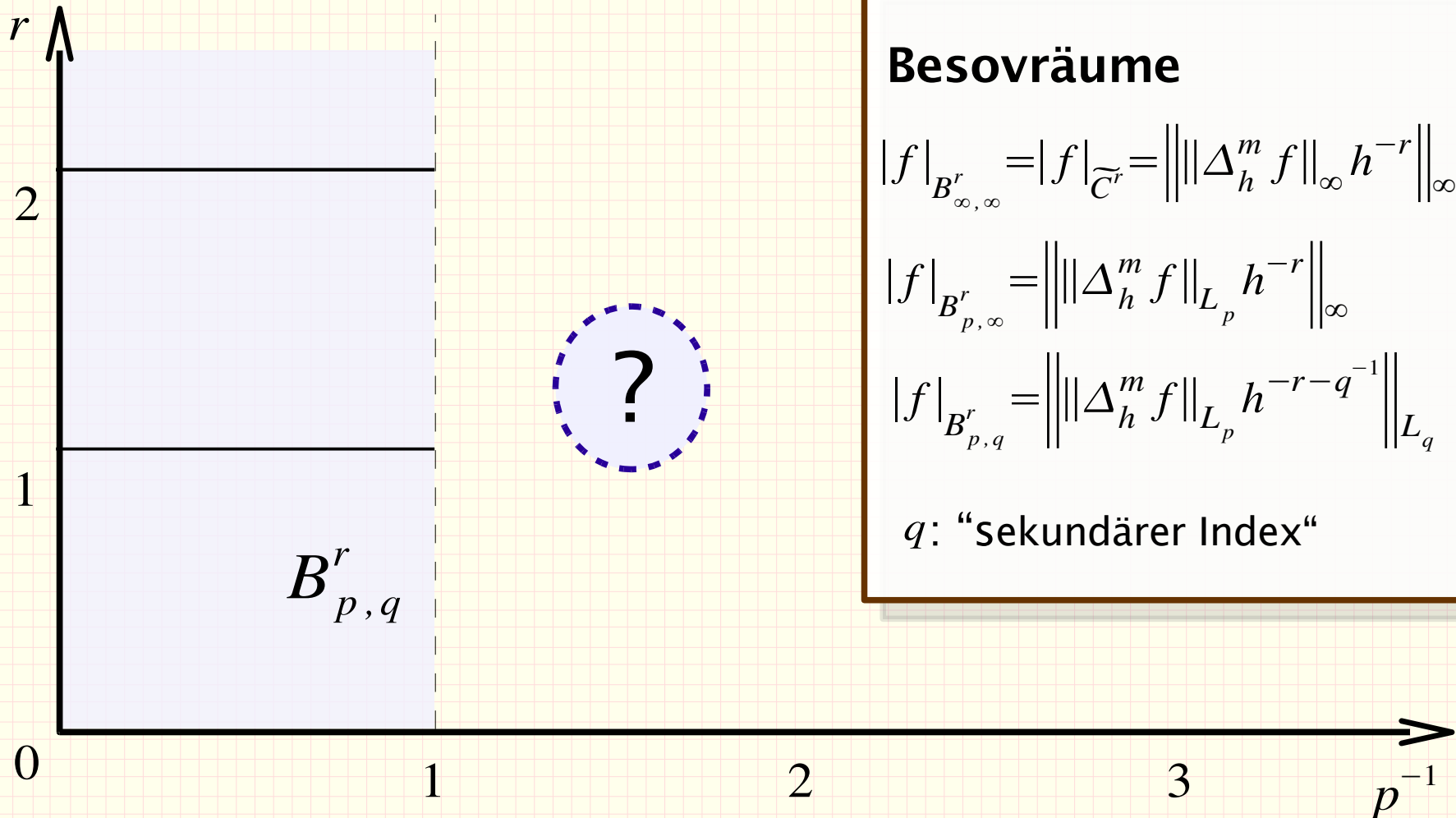


Integrierbare Finite Differenzen





Integrierbare Finite Differenzen



Besovräume

$$|f|_{B_{\infty,\infty}^r} = |f|_{\tilde{C}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{\infty} h^{-r} \right\|_{\infty}$$

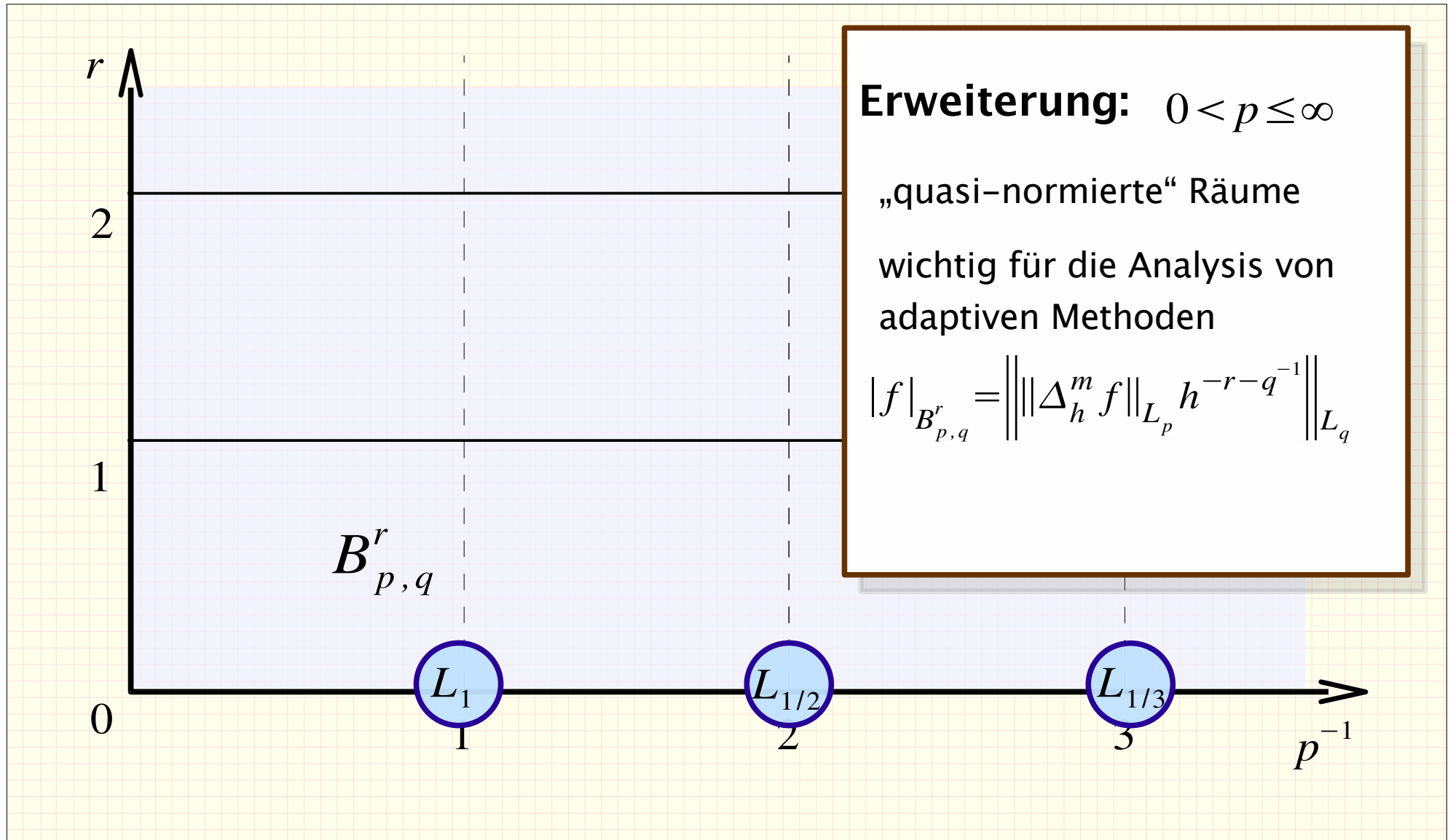
$$|f|_{B_{p,\infty}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{L_p} h^{-r} \right\|_{\infty}$$

$$|f|_{B_{p,q}^r} = \left\| \left\| \Delta_h^m f \right\|_{L_p} h^{-r-q^{-1}} \right\|_{L_q}$$

q : "sekundärer Index"

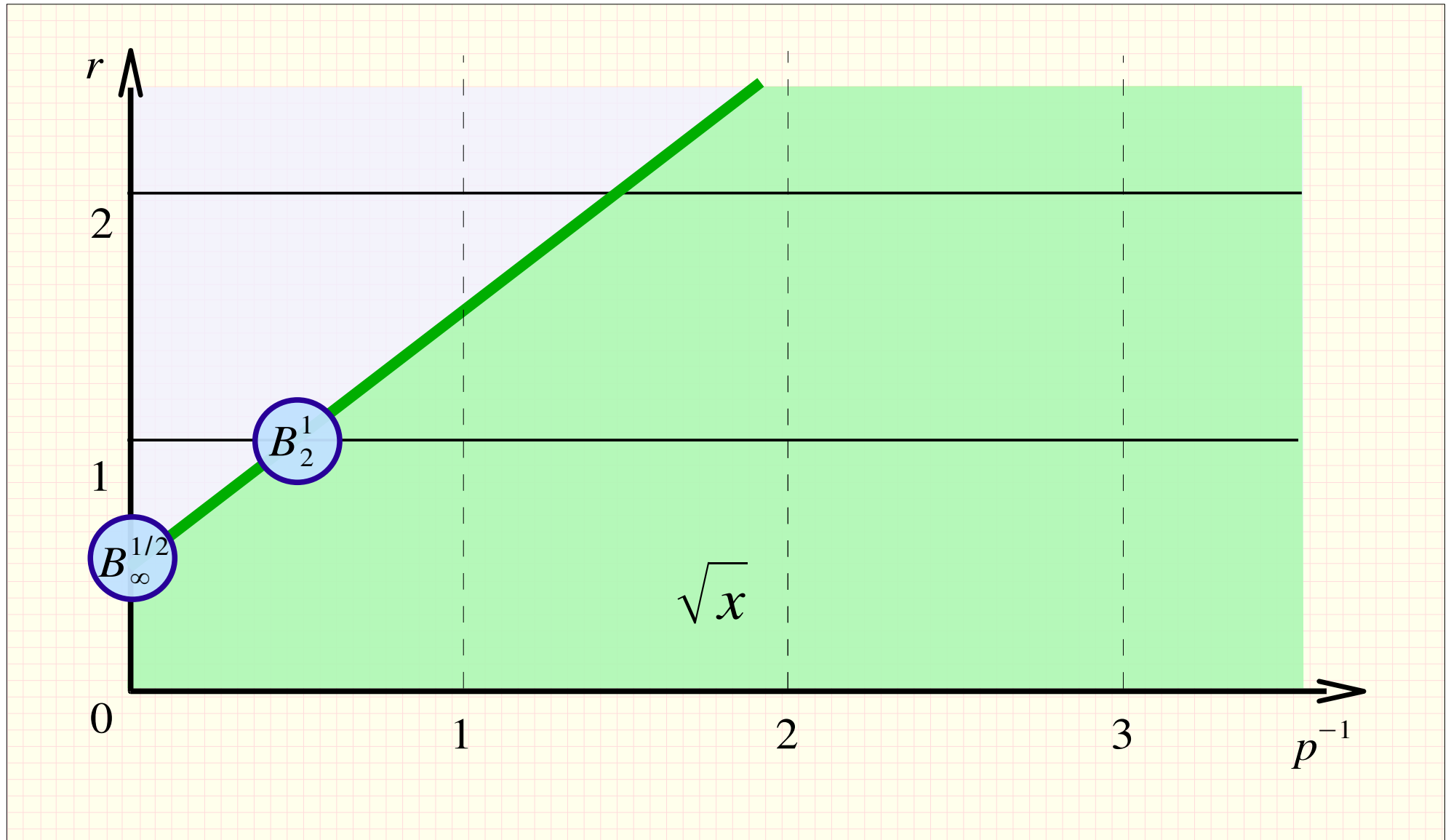


Integrierbare Finite Differenzen



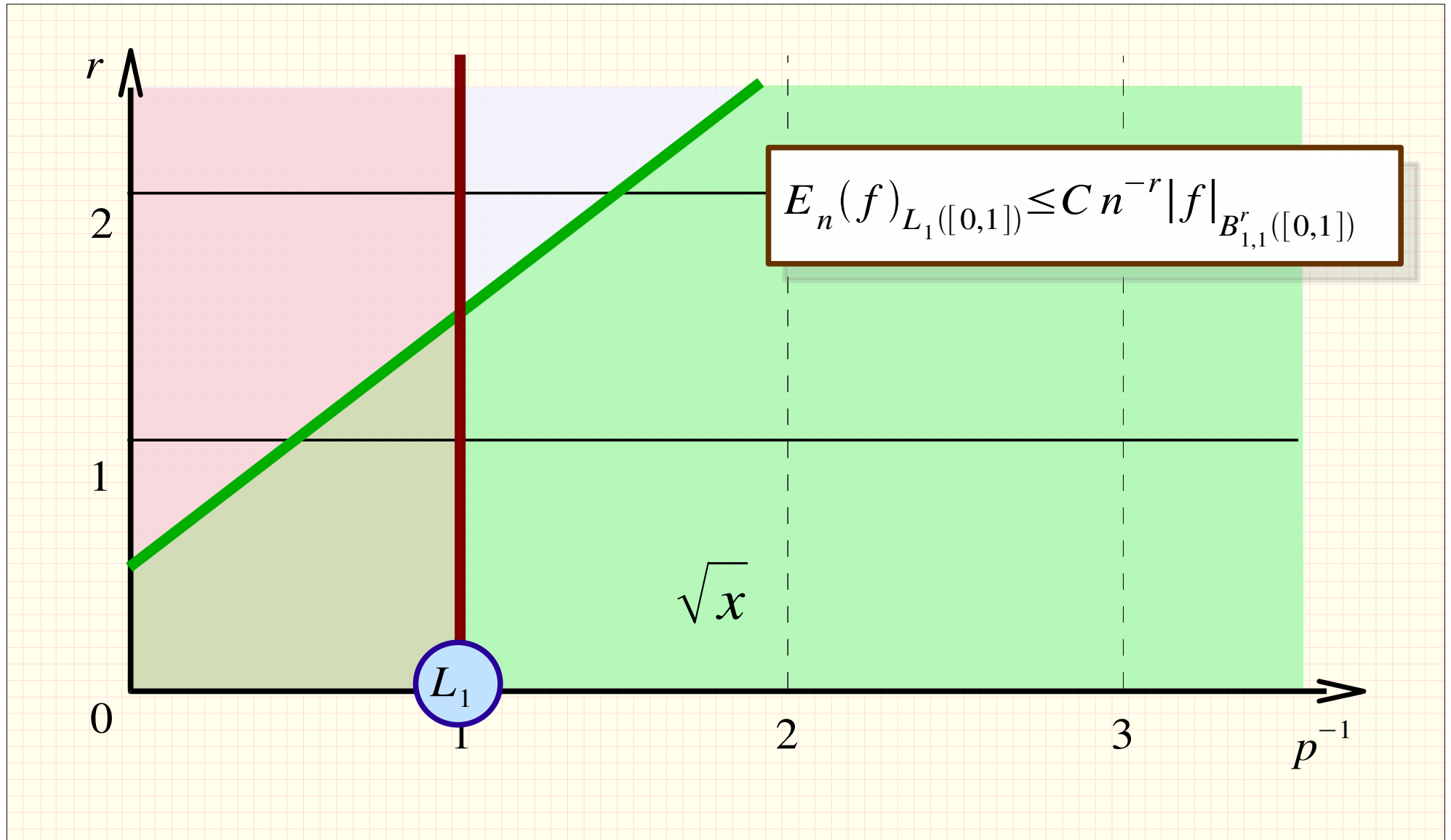


Beispiel: Wurzelfunktion



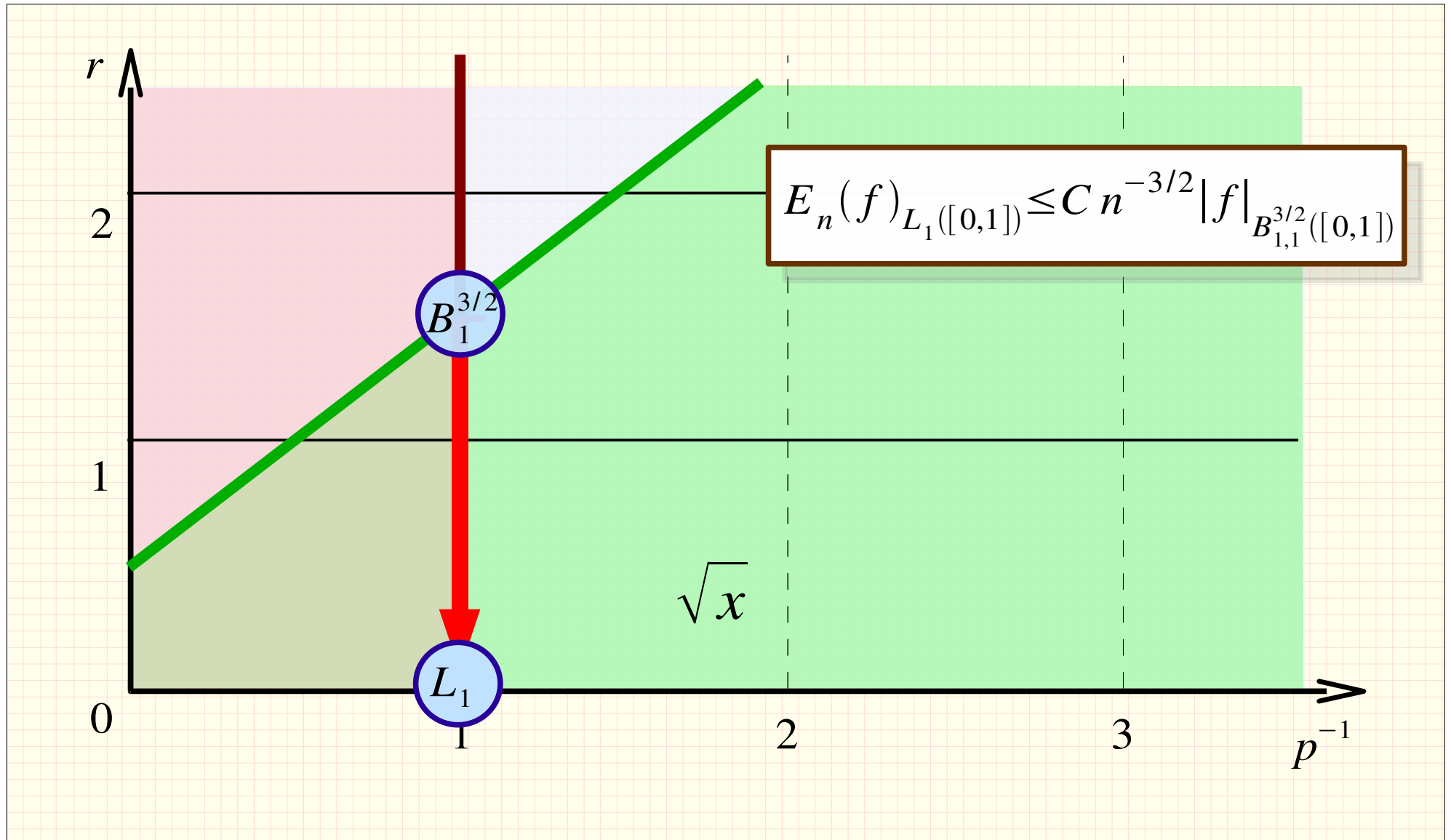


Lineare Approximation





Lineare Approximation



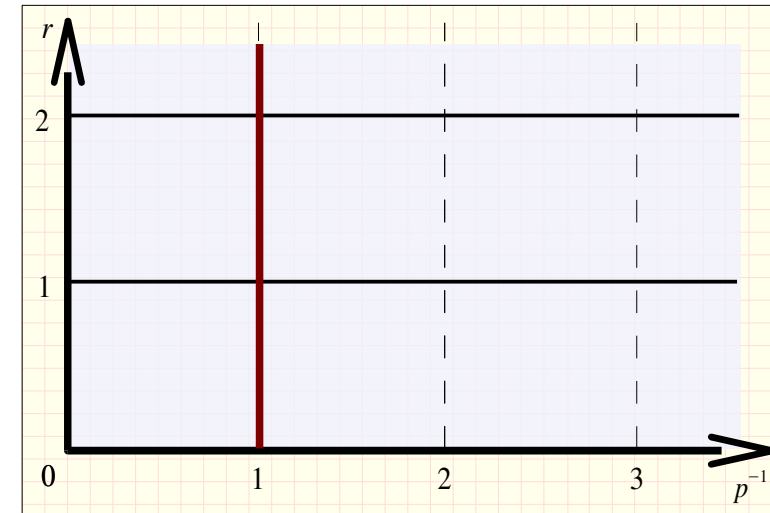


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{1,1}^r(I_h)} h^r$$



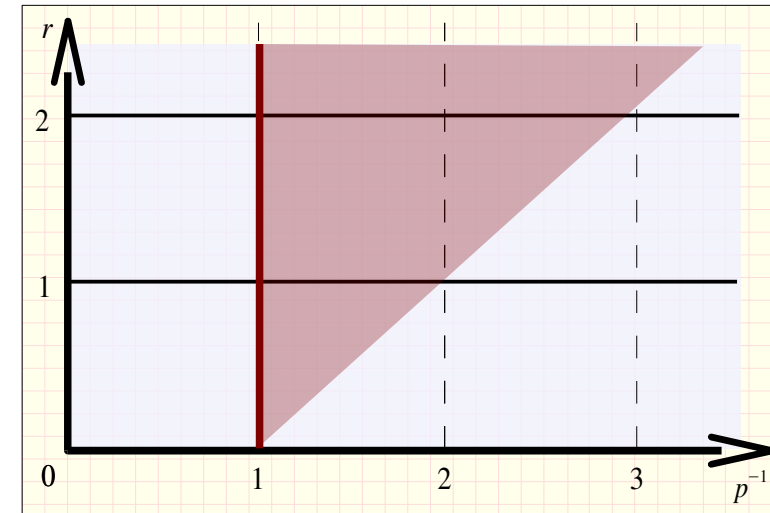


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} h^{r+1-p^{-1}} \quad p \leq 1$$





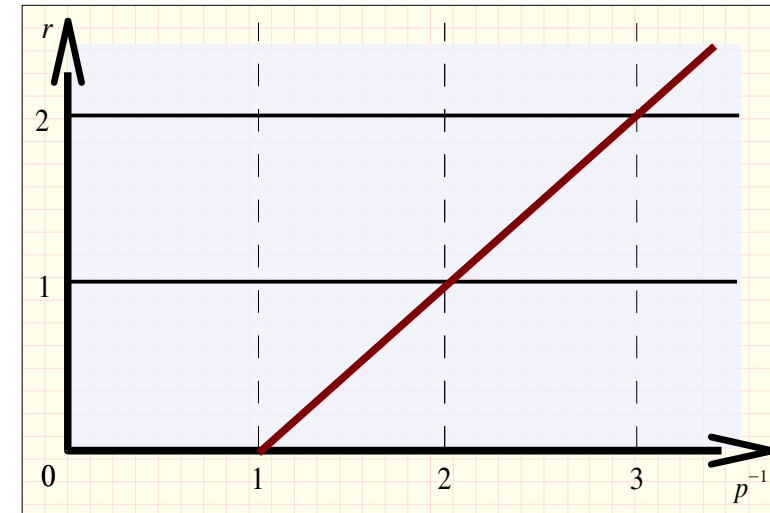
Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)}$$

$$p^{-1} = r + 1$$





Nichtlineare Approximation

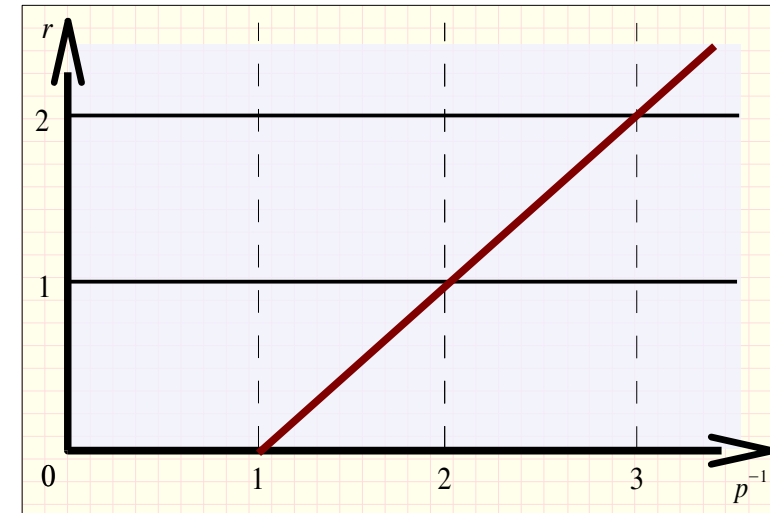


Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)}$$

$$p^{-1} = r + 1$$

Äquilibrirung des Fehlers?



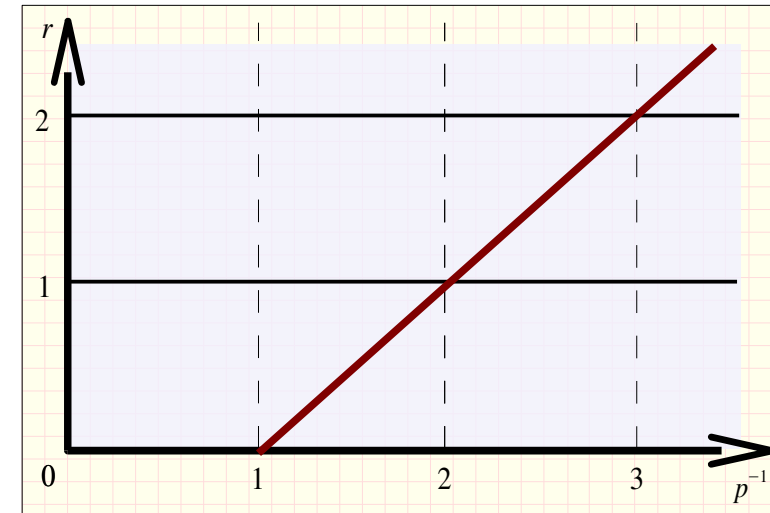


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} \quad p^{-1} = r + 1$$



Äquilibrirung der Fehlerschranke:

$$|f|_{B_{p,p}^r([0,1])}^p \approx \sum_{i=1}^n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}^p = n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}^p$$

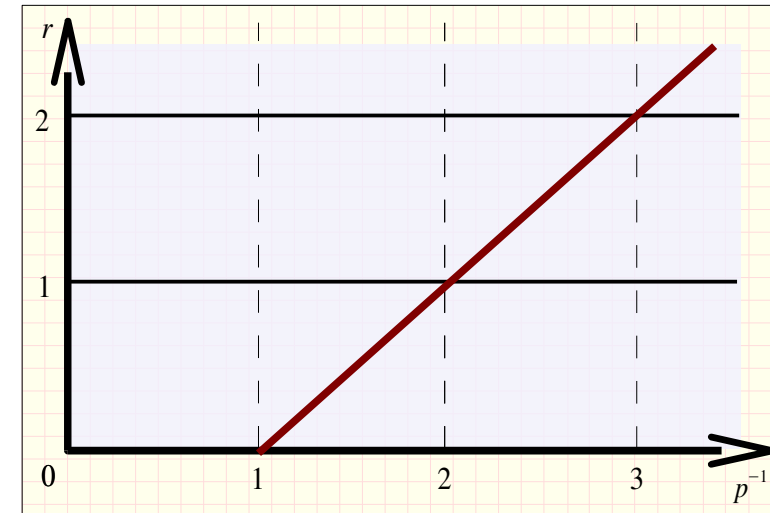


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} \quad p^{-1} = r + 1$$



Äquilibrierung der Fehlerschranke:

$$|f|_{B_{p,p}^r([0,1])}^p \approx \sum_{i=1}^n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}^p = n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}^p$$

$$|f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})} \approx n^{-p^{-1}} |f|_{B_{p,p}^r([0,1])}$$

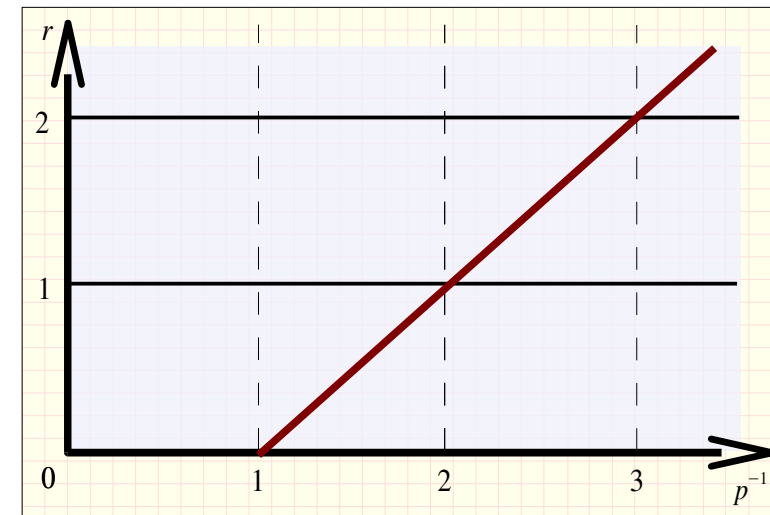


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} \quad p^{-1} = r + 1$$



Äquilibrierung der Fehlerschranke:

$$|f|_{B_{p,p}^r([0,1])}^p \approx \sum_{i=1}^n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}^p = n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}^p$$

$$|f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})} \approx n^{-(r+1)} |f|_{B_{p,p}^r([0,1])}$$

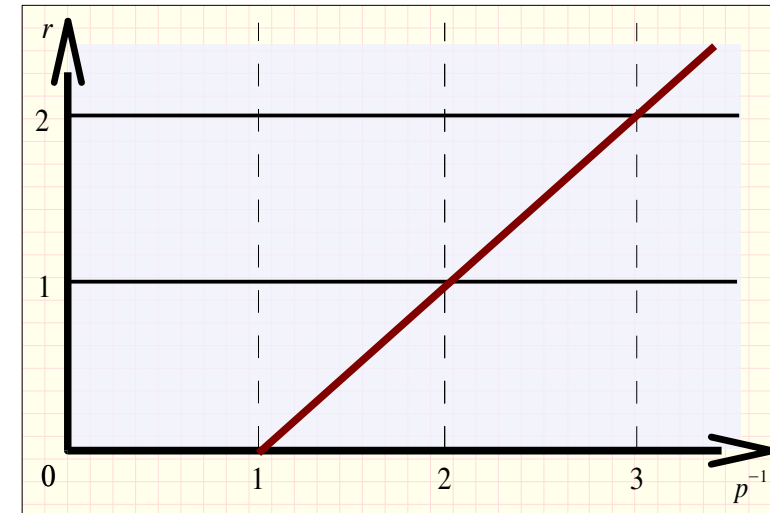


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} \quad p^{-1} = r + 1$$



Äquilibrierung der Fehlerschranke:

$$|f|_{B_{p,p}^r([0,1])}^p \approx \sum_{i=1}^n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}^p = n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}^p$$

$$|f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})} \approx n^{-(r+1)} |f|_{B_{p,p}^r([0,1])}$$

$$E_n(f)_{L_1([0,1])} \leq \sum_{i=1}^n \|f - q_i\|_{L_1(I_{h_i})} \leq \sum_{i=1}^n C |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}$$

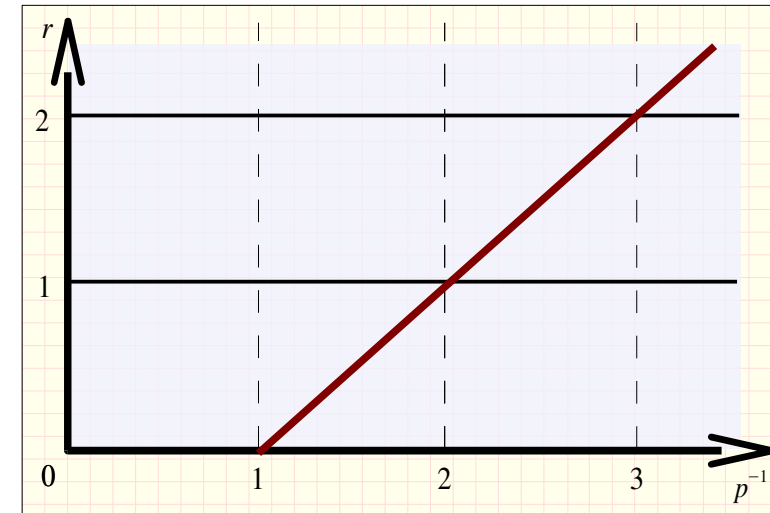


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} \quad p^{-1} = r + 1$$



Äquilibrirung der Fehlerschranke:

$$|f|_{B_{p,p}^r([0,1])}^p \approx \sum_{i=1}^n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}^p = n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}^p$$

$$|f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})} \approx n^{-(r+1)} |f|_{B_{p,p}^r([0,1])}$$

$$E_n(f)_{L_1([0,1])} \leq \sum_{i=1}^n \|f - q_i\|_{L_1(I_{h_i})} \leq n C |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}$$

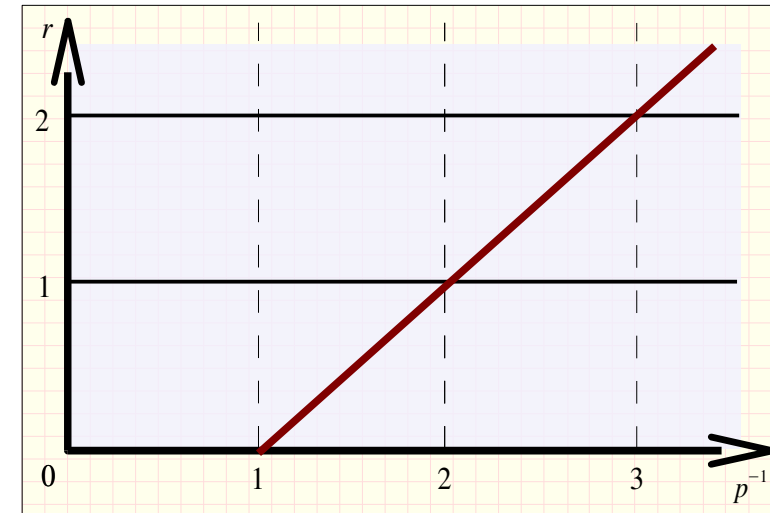


Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)} \quad p^{-1} = r + 1$$



Äquilibrierung der Fehlerschranke:

$$|f|_{B_{p,p}^r([0,1])}^p \approx \sum_{i=1}^n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_i})}^p = n |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})}^p$$

$$|f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})} \approx n^{-(r+1)} |f|_{B_{p,p}^r([0,1])}$$

$$E_n(f)_{L_1([0,1])} \leq \sum_{i=1}^n \|f - q_i\|_{L_1(I_{h_i})} \leq n C |f|_{B_{p,p}^r(I_{h_j})} \approx n^{-r} C |f|_{B_{p,p}^r([0,1])}$$



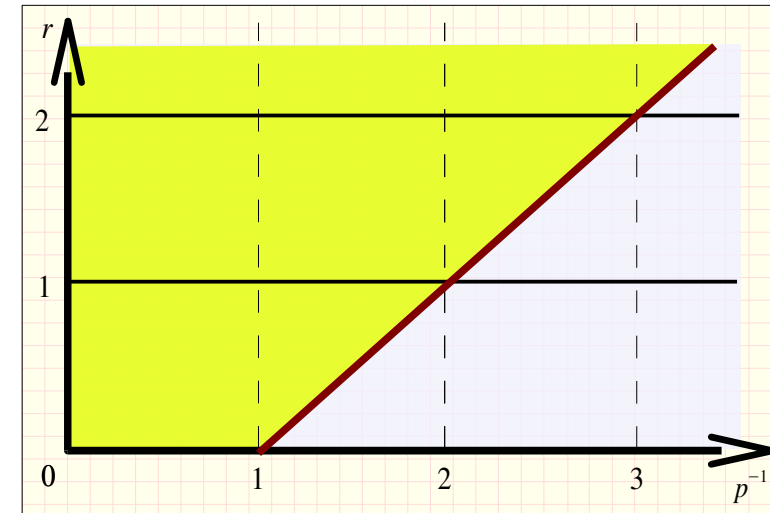
Nichtlineare Approximation



Fehlerabschätzungen pro Intervall:

$$\|f - q_i\|_{L_1(I_h)} \leq C |f|_{B_{p,p}^r(I_h)}$$

$$p^{-1} = r + 1$$



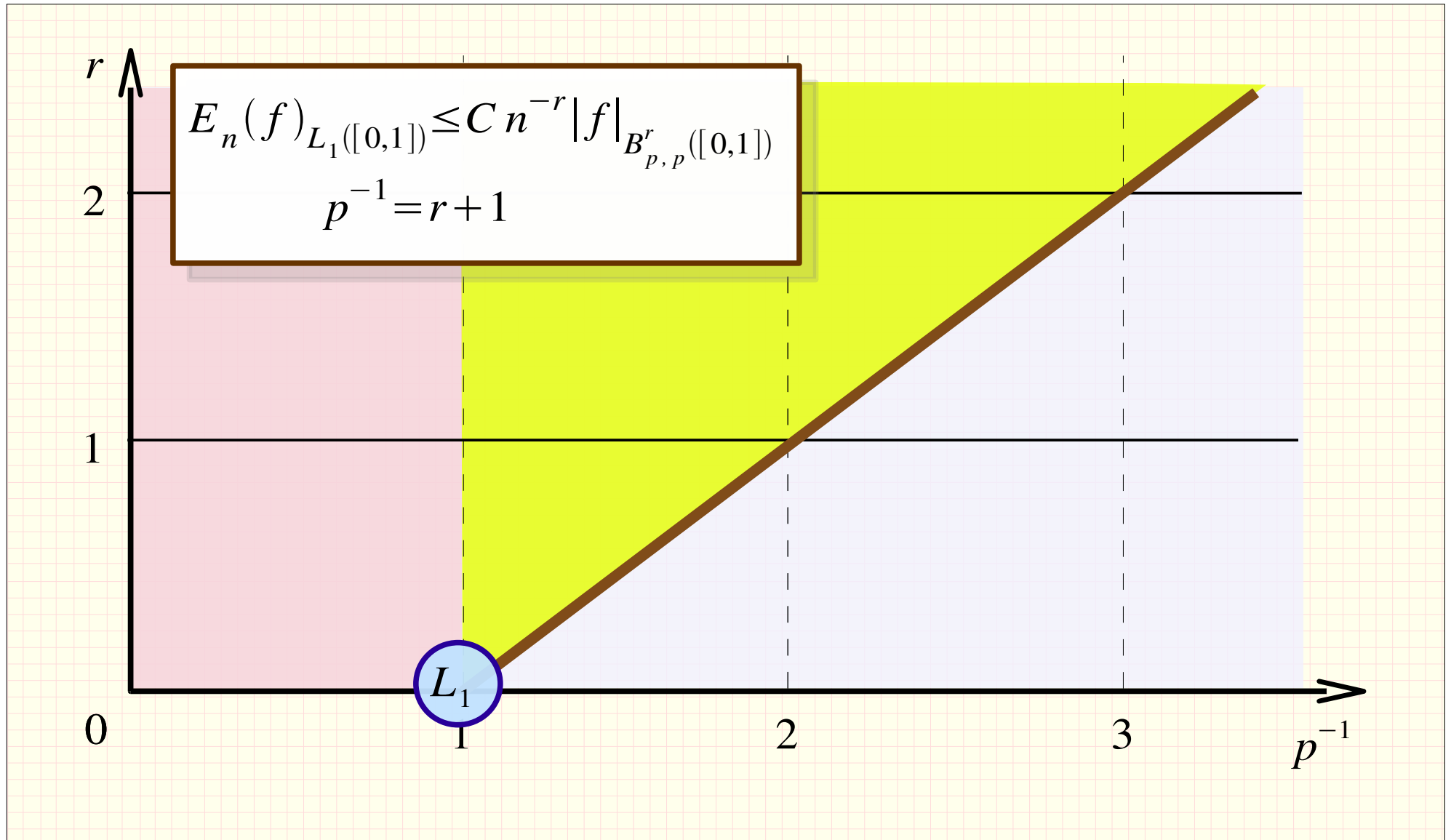
Jackson-Ungleichung:

$$E_n(f)_{L_1([0,1])} \leq C \|f\|_{B_{p,p}^r([0,1])} n^{-r} \quad p^{-1} = r + 1$$

[Petrushev 1988]

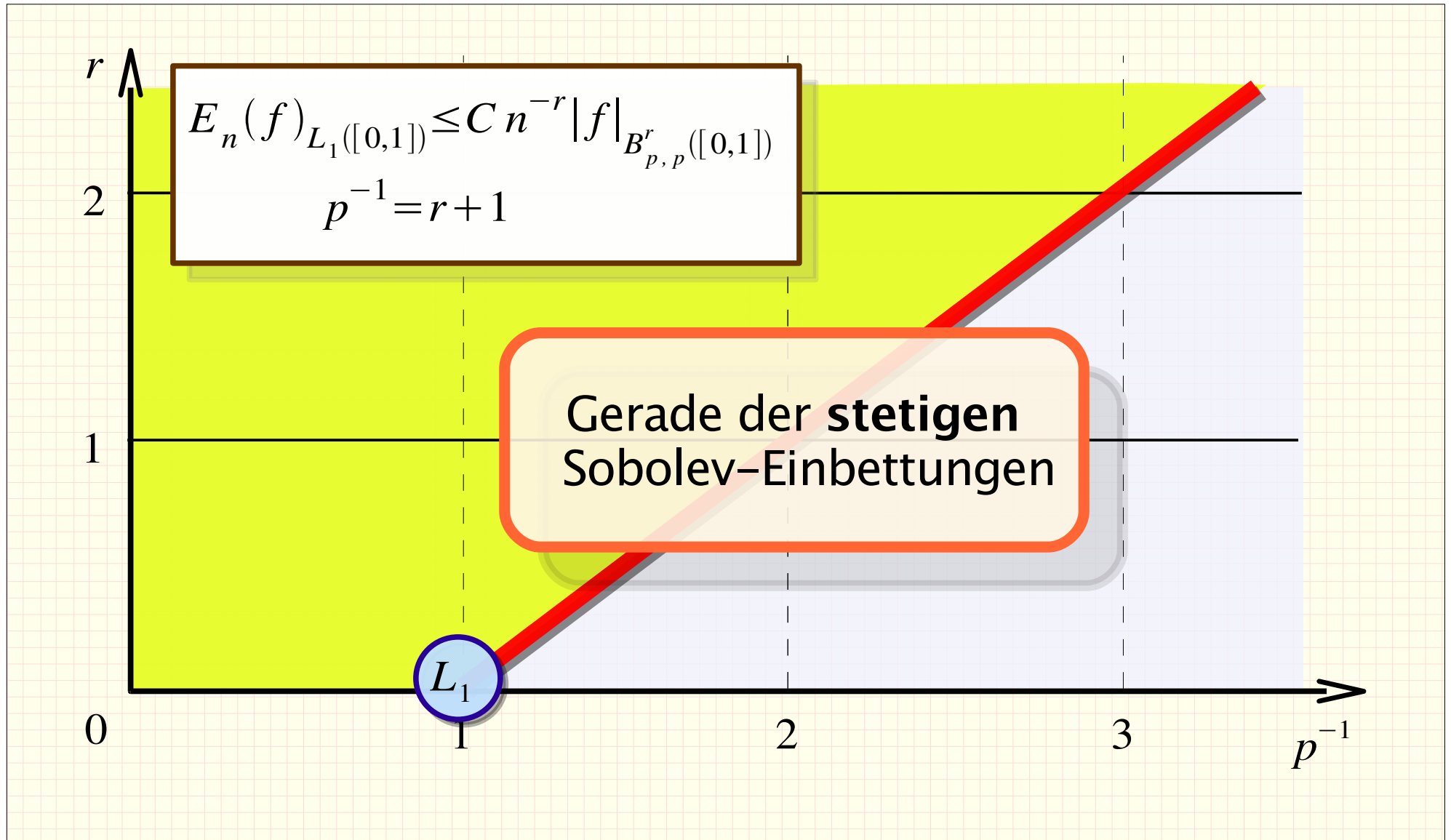


Nichtlineare Approximation



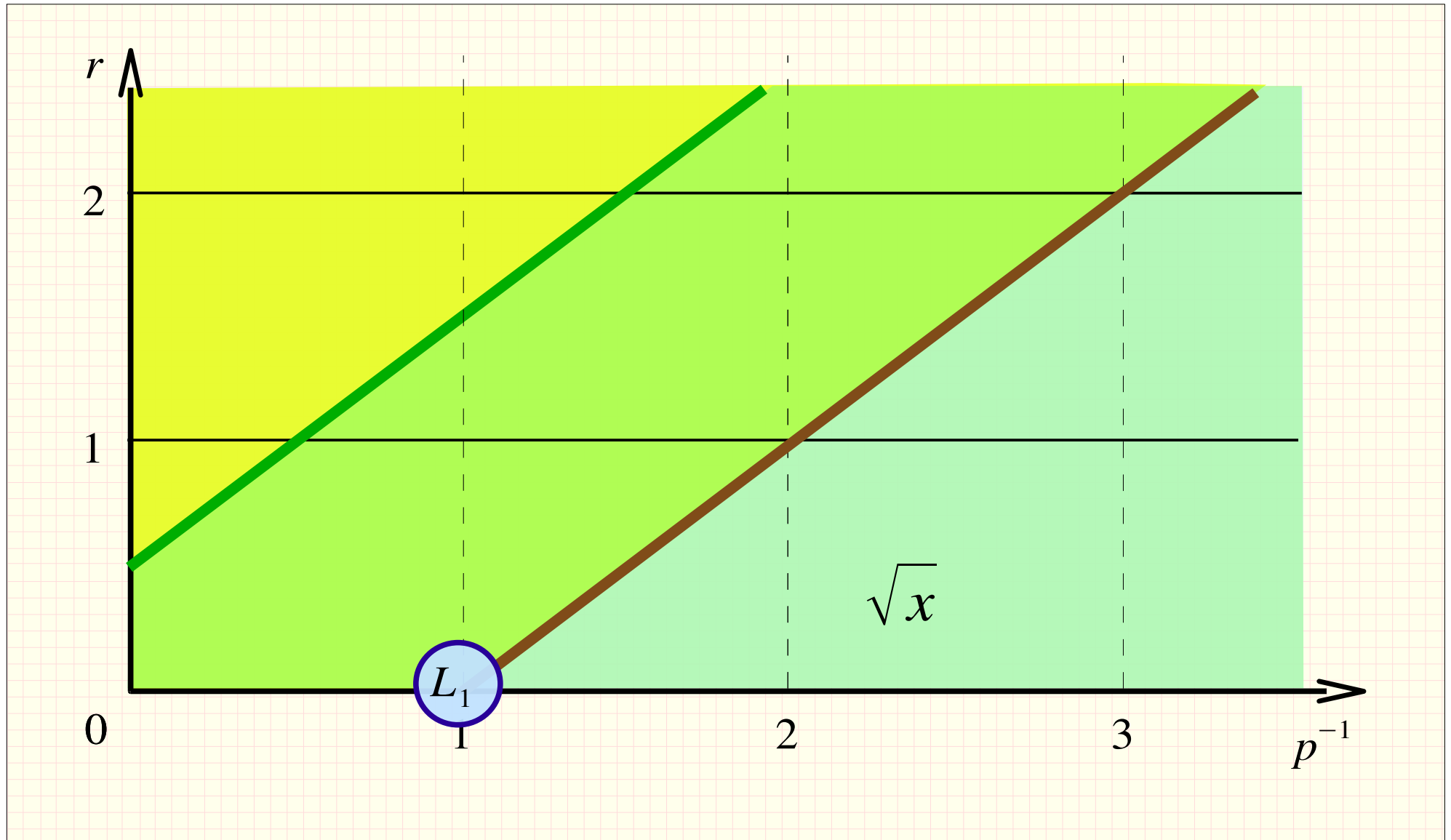


Nichtlineare Approximation



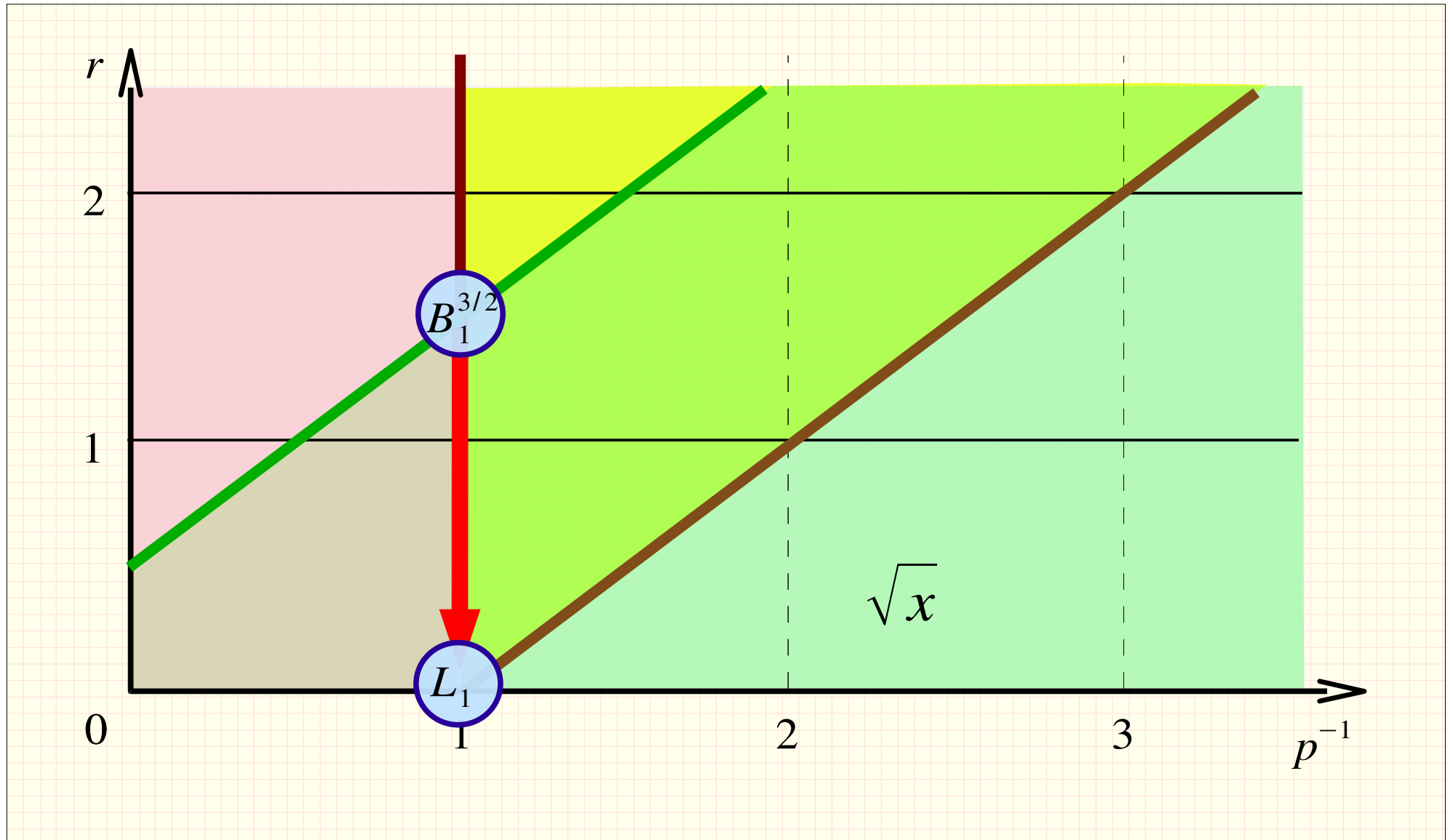


Beispiel: Wurzelfunktion



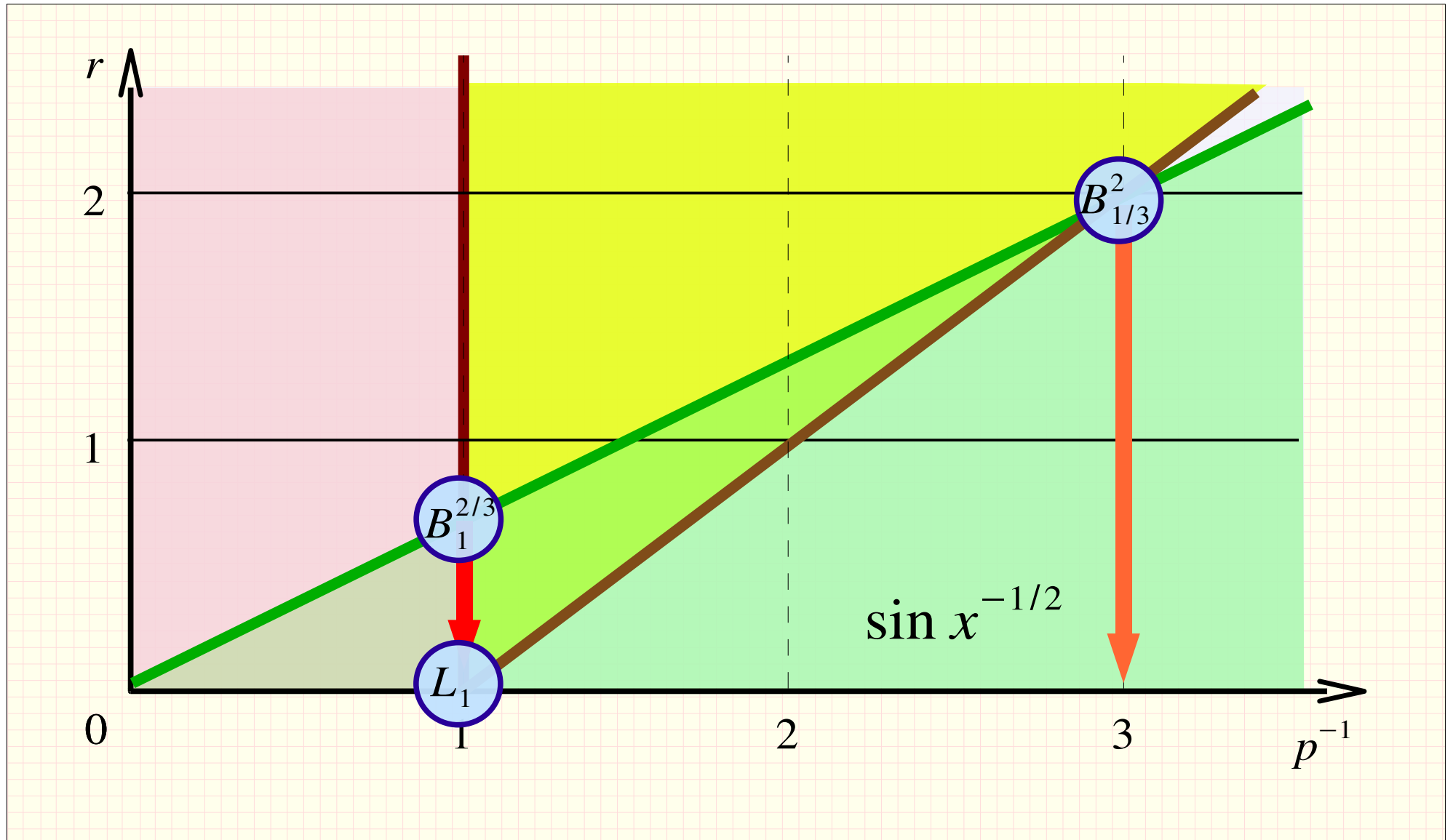


Beispiel: Wurzelfunktion



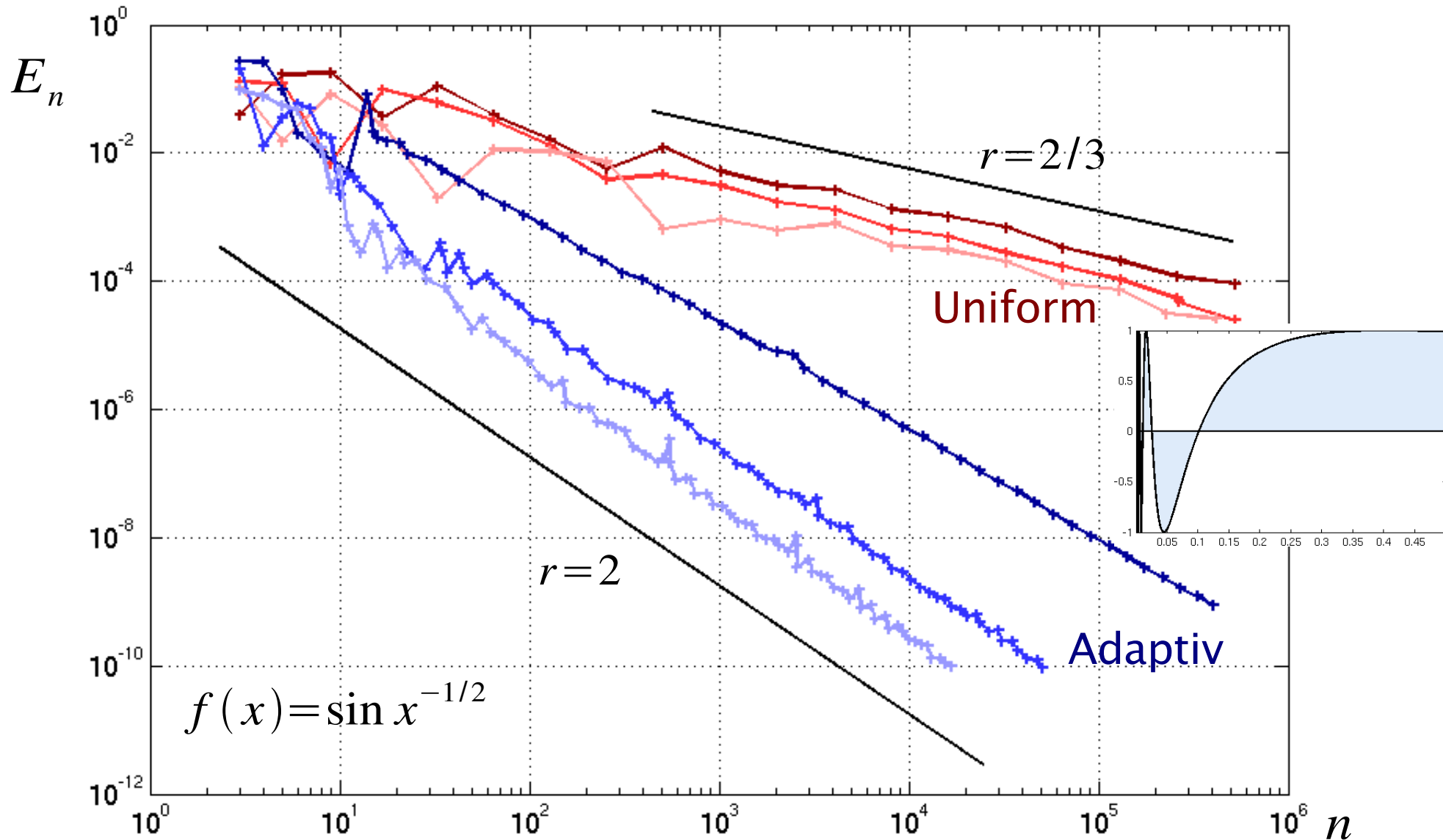


Oszillierender Integrand



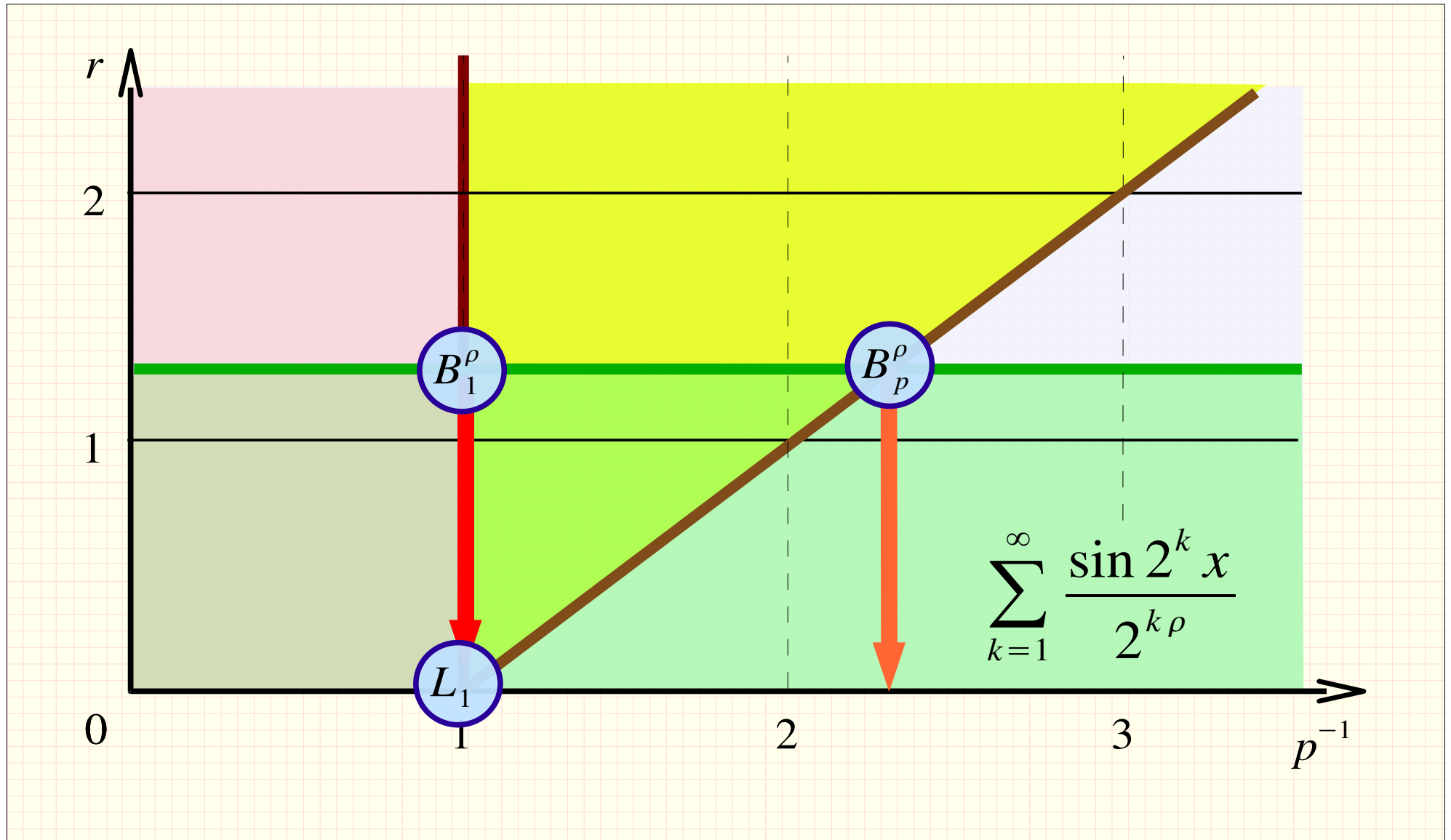


Oszillierender Integrand



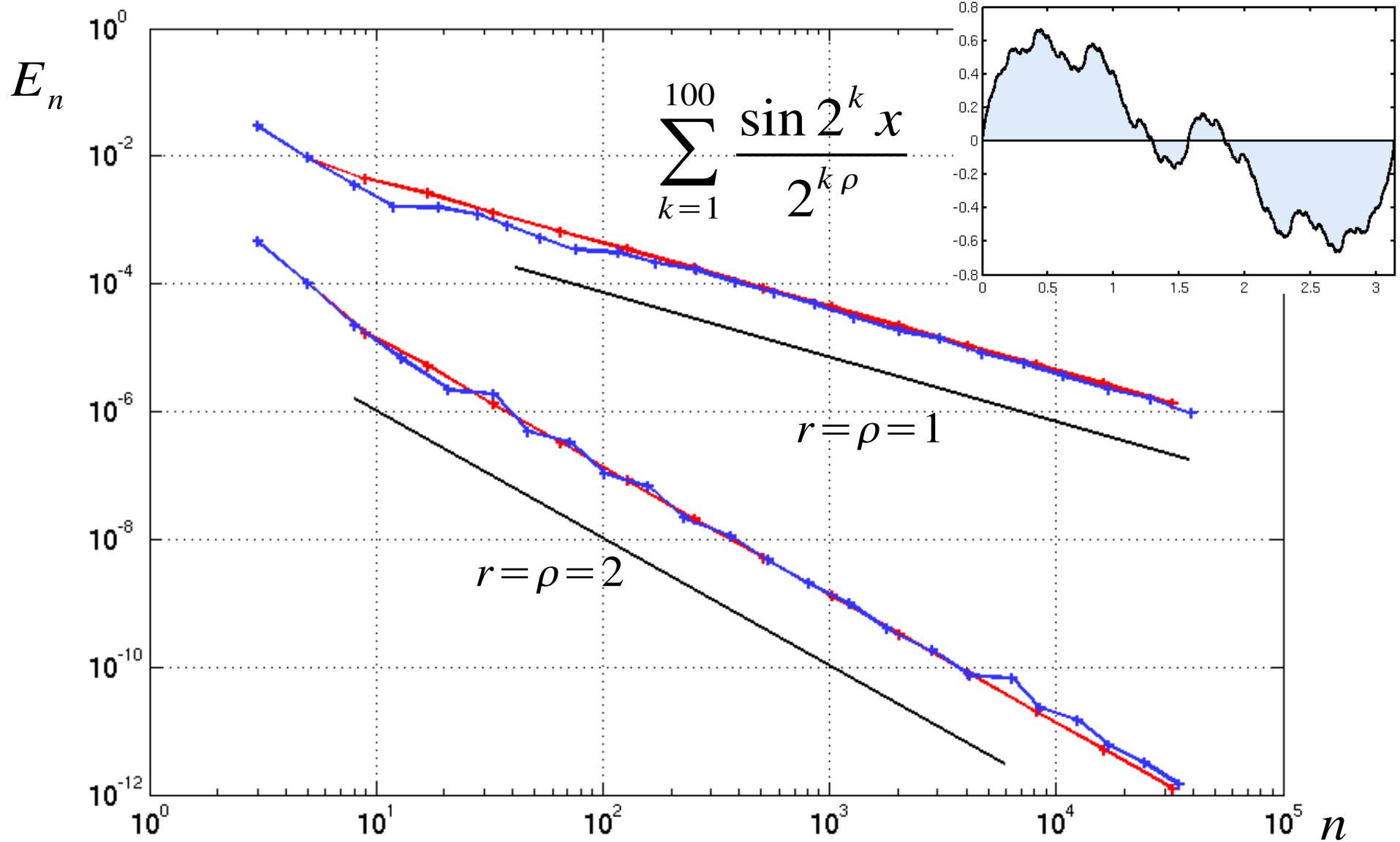


Pathologisches Beispiel





Pathologisches Beispiel





Rolle in der numerischen Analysis



Nichtlineare Approximationstheorie als Baustein:

- Zusammenhang zwischen Glattheit und Approximierbarkeit
- Mathematische Quantifizierung des Begriffs „lokale Effekte“
- Idealisierter Rahmen

Fragen bei einem konkreten Algorithmus:

- Glattheit der Lösungen?
- Fehlerschätzer genau genug?
- Adaptives Gitter flexibel genug?
- ...



Adaptive Finite Elemente



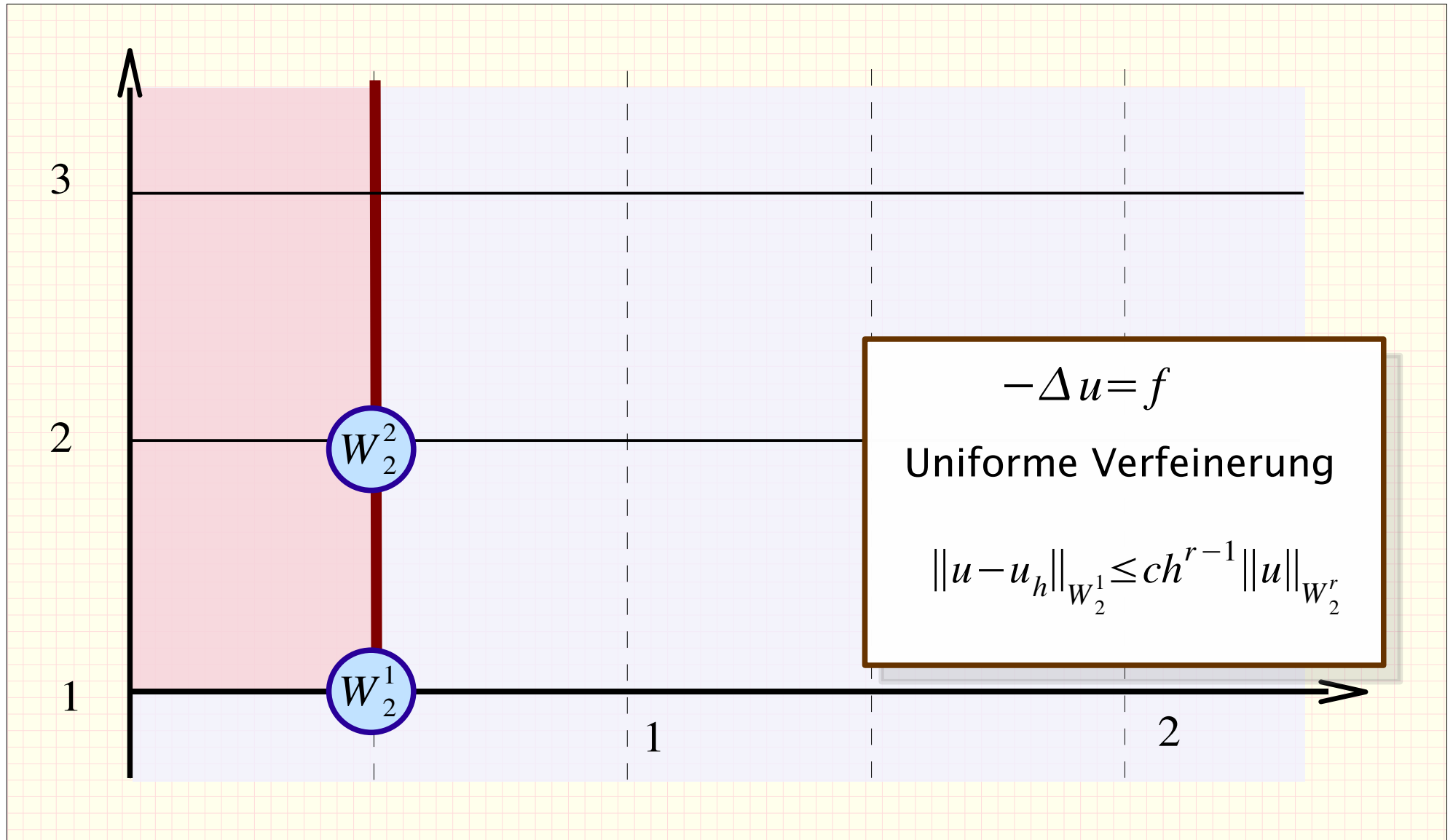
Adaptive FEM seit Anfang der 70er Jahre *[Babuska, Rheinboldt 1978]*

Konvergenzbeweis einer adaptiven FEM: *[Dörfler 1996],*
[Morin, Nochetto, Siebert 2000, 2002]

Adaptive FEM und nichtlineare Approximationstheorie:
[Binev, Dahmen, DeVore, Petrushev 2002, 2004]

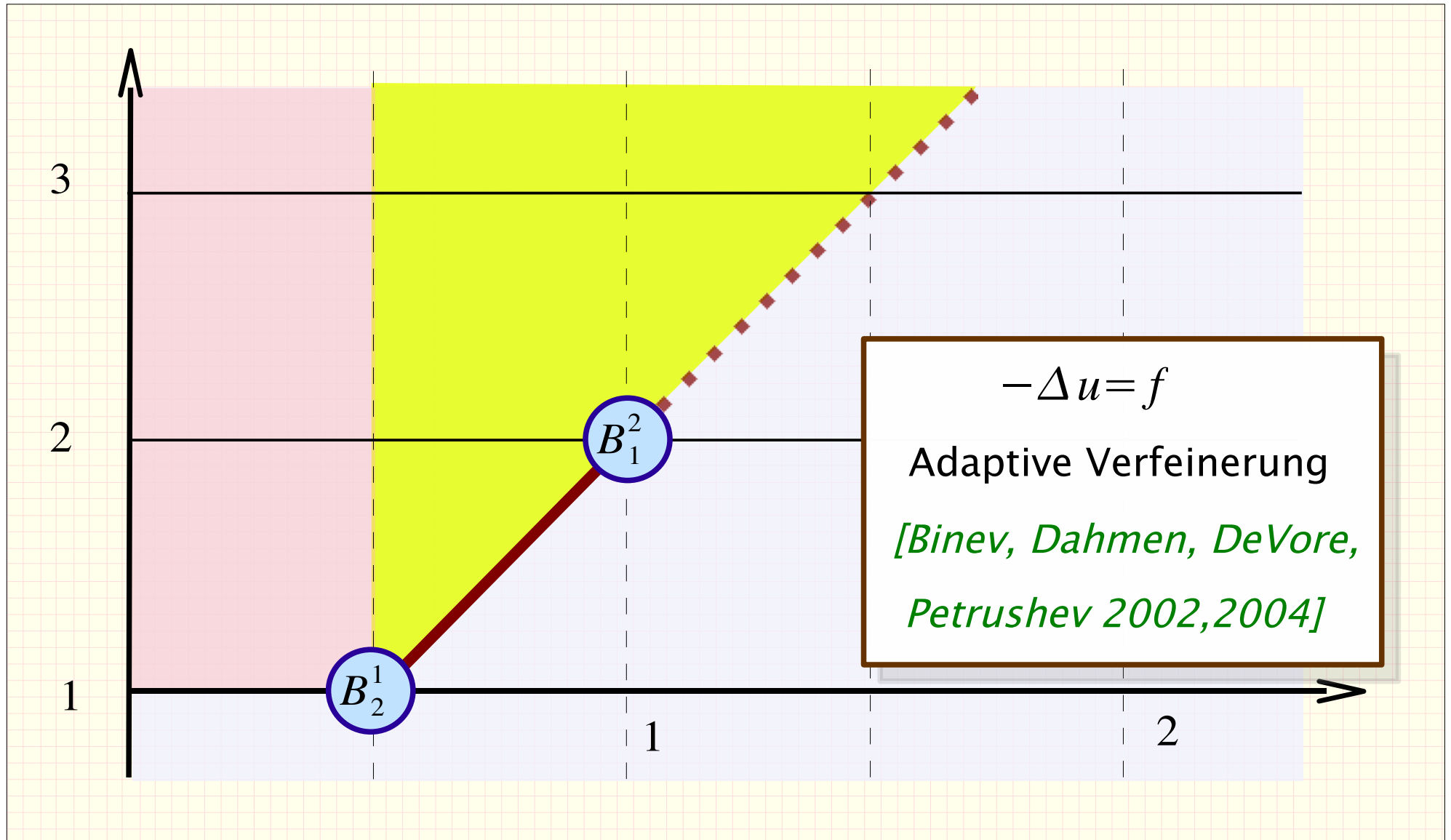


Poisson-Gleichung



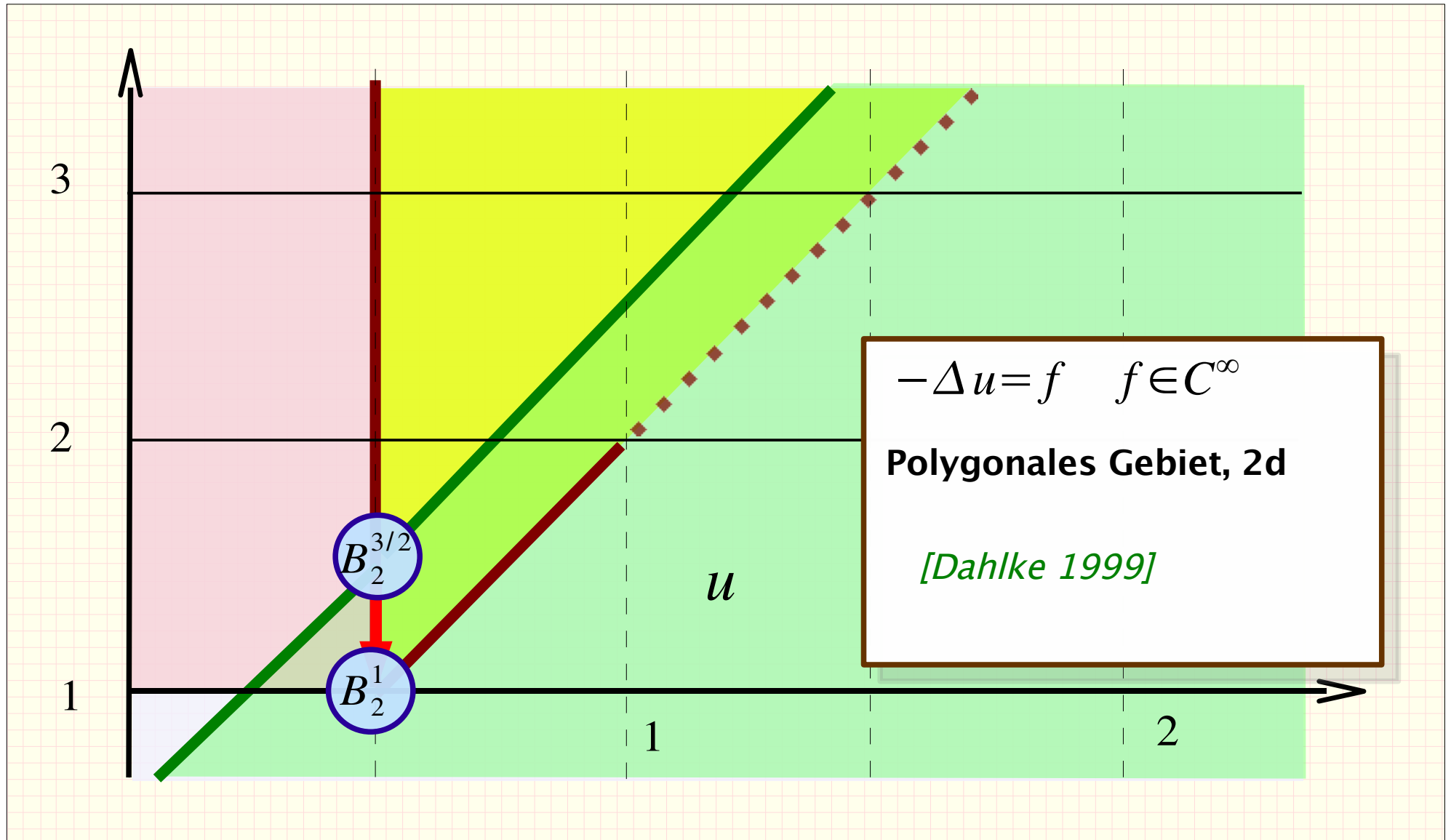


Adaptive Finite Elemente





Regularität





Ausblick



Weiterführende Konzepte

- Jackson-, Bernstein-Ungleichungen und Interpolation
- Verschiedene Charakterisierungen der Besov-Räume
- Algorithmische Ansätze

Literatur zum Einstieg

- DeVore: *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica, 1998
- Triebel: *Theory of Function Spaces II*, 1992, Kap. 1
- DeVore/Lorentz: *Constructive Approximation*, 1993



Weiterführende Konzepte

- Jackson-, Bernstein-Ungleichungen und Interpolation
- Verschiedene Charakterisierungen der Besov-Räume
- Algorithmische Komplexität

Vielen Dank!

Literatur zum Einstieg

- DeVore: *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica, 1998
- Triebel: *Theory of Function Spaces II*, 1992, Kap. 1
- DeVore/Lorentz: *Constructive Approximation*, 1993



Ausblick



Weiterführende Konzepte

- Jackson-, Bernstein-Ungleichungen und Interpolation
- Verschiedene Charakterisierungen der Besov-Räume
- Algorithmische Ansätze

Literatur zum Einstieg

- DeVore: *Nonlinear Approximation*, Acta Numerica, 1998
- Triebel: *Theory of Function Spaces II*, 1992, Kap. 1
- DeVore/Lorentz: *Constructive Approximation*, 1993