Freie Universität Berlin
FB Mathematik und Informatik
Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Ralf Borndörfer
Stephan Schwartz

Lineare Algebra 2 (Lehramt)

Übungsblatt 5

Abgabe: bis Mi, 22.11.2017, 12:00 Uhr

Aufgabe 5.1 — 4+4+2+2 Punkte

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ 30 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $S = {}_E T_{\mathcal{B}}$ der Basistransformation von der Basis $\mathcal{B}$ zur Standardbasis und deren inverse S^{-1}.

c) Beweisen Sie, dass $A^n = SD^nS^{-1}$, wobei D die Diagonalmatrix mit Eigenwerten ist (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$).

d) Berechnen Sie A^{100}.

Aufgabe 5.2 — 3+3+4 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spaltenstochastisch, das heißt $a_{ij} \in [0,1]$ und $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für alle j. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) $\sum_{i=1}^n |w_i| \leq \sum_{i=1}^n |v_i|$ für beliebiges $v \in \mathbb{R}^n$ und $w = Av$.

b) $\lambda \in \Lambda(A) \Longrightarrow |\lambda| \leq 1$.

c) $1 \in \Lambda(A)$.

Aufgabe 5.3 — 3+3+4+3 Punkte

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = A - 4I$.

a) Zeigen Sie, dass $\Lambda(A) = \{4\}$.

b) Zeigen Sie, dass $v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin ker B$ und $v_1 := Bv_2 \in ker B$.

c) Finden Sie v_3, sodass (v_1, v_3) eine Basis von $ker B$ ist und bestimmen Sie die Basistransformationsmatrix $S = {}_E T_{\mathcal{B}}$ für $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ sowie S^{-1}.

d) Berechnen Sie die Matrix $J = S^{-1}AS$.