Freie Universität Berlin
Zuse Institut Berlin (ZIB)
Prof. Dr. H. Siebert, Prof. Dr. S. Röblitz, Dr. T. Dierkes

8. Übungsblatt zur Vorlesung Höhere Analysis Sommersemester 2015

Abgabe: 16.06.2015 in der Vorlesung

Bitte beachten Sie:
Die Aufgaben sollen in Zweiergruppen abgegeben werden. Auf jedem Übungszettel müssen die Namen **beider** *Gruppenmitglieder stehen. Bitte tackern Sie Ihre Lösungen zusammen.*

Aufgabe 1 (4 Punkte, Stabilität linearer *inhomogener* Systeme)
Man betrachte das folgende 2-dimensionale Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - \kappa y_1, \\ y_2' &= y_1 - y_2 + \nu. \end{aligned}$$

Dieses ist ein lineares *inhomogenes* System. Wir nehmen an, dass $\kappa \geq 0$, $\kappa \neq 1$ und $\nu > 0$.

(a) Berechnen Sie den Fixpunkt (y_1^*, y_2^*) dieses linearen Systems.

(b) Das inhomogene System kann in ein *homogenes* System transformiert werden, indem man die Variablen verschiebt:

$$\tilde{y}_1 := y_1 - y_1^*, \quad \tilde{y}_2 := y_2 - y_2^*.$$

Formulieren Sie das Differentialgleichungssystem für $\tilde{y}_1$ und $\tilde{y}_2$. Sind die Lösungen dieses Systems stabil? Was können Sie über die Stabilität von Lösungen des ursprünglichen Systems aussagen?

(c) Charakterisieren Sie das Phasenportrait um den Fixpunkt (y_1^*, y_2^*).

Aufgabe 2 (4 Punkte, *Qualitative Analyse*)
Das folgende System soll nach seinen qualitativen Eigenschaften untersucht werden:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + \frac{1}{6} y_1^3 - y_2 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die stationären Punkte des Systems und untersuchen Sie diese auf Stabilität.

(b) Tragen Sie in einer Skizze die jeweiligen lokalen Phasenportraits ein. Im Fall zweier reller Eigenwerte nutzen Sie dazu die zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 3 (2 Punkte, *Lyapunovfunktion*)
Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $y^* = (0,0)$ des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_1 y_2^3 \\ y_2' &= -y_1^2 y_2^2 - y_2^3 \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Lyapunovfunktion E. *(Hinweis: Machen Sie den Ansatz $E(y) = ay_1^2 + by_2^2$.)*

Aufgabe 4 (2 Punkte, *1. Integral*)
Eine Funktion E heißt 1. Integral des Systems $y' = f(y)$, wenn E auf den Trajektorien der Lösung konstant ist, also $\partial E(y(t)) = 0$ für alle Lösungen $y(t)$ gilt.
Sei $P : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (ein Potential). Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y'' = -\nabla P(y).$$

Formulieren Sie diese Gleichung als System 1. Ordnung in den Variablen y und $v = y'$ und zeigen Sie, dass

$$E(y, v) := \frac{1}{2} v^T v + P(y)$$

ein 1. Integral dieser Gleichung ist. Wie lautet die physikalische Interpretation?

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot \overline{z}$. In welchen Punkten ist f komplex differenzierbar, in welchen holomorph?