FU Berlin: WiSe 2019/20 (Mathematik 2, Weber)

Übungszettel Nr. 8, Abgabe 10.12.2019 um 8:00 Uhr

Lernziele: Gradient, Hessematrix, Minimum, Maximum, Sattelpunkt(ordnung)

Aufgabe 1: (Totales Differential zweiter Ordnung in Matrixschreibweise)

In der Vorlesung Mathematik I haben Sie das totale Differential kennengelernt. Nehmen wir an, wir haben eine Funktion $z = f(x, y)$ mit zwei unabhängigen Variablen x, y und einer abhängigen Variable z. Wie ändert sich nun der Funktionswert bei einer (infinitesimal) kleinen Änderung der Werte für x bzw. y?

Ausgedrückt werden die kleinen Änderungen durch dx, dy, dz. Mit Hilfe der partiellen Ableitungen erhält man:

$$dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dy.$$

Oder äquivalent in Matrixnotation (Skalarprodukt):

$$dz = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^T$ heißt auch *Gradient der Funktion f.*

Wir haben auch schon kennen gelernt, wie sich die infinitesimale Änderung des Funktionswertes ändert, also $d^2 z$ (diesen Satz nochmal auf der Zunge zergehen lassen!). Das sogenannte totale Differential zweiter Ordnung lautet (Zettel Nr. 9 der Mathematik I):

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\, dy^2.$$

Aufgabe ist, dieses totale Differential zweiter Ordnung in Form einer Vektor-Matrix-Vektor-Multiplikation zu schreiben:

$$d^2 z = (dx, dy)\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Wie müssen also die vier Elemente der zu bestimmenden Matrix aussehen, die sich auch *Hessematrix der Funktion f* nennt?

Aufgabe 2: (Kritische Punkte finden: Gradient=0)

Kritische Punkte einer mehrdimensionalen Funktion sind (Flachstellen, also) solche Punkte, bei denen sich der Funktionswert $z = f(x, y)$ bei infinitesimal kleinen Änderungen von x und y nicht ändert. Anders ausgedrückt: $dz = 0$. Dieses sind gemäß Aufgabe 1 also Punkte (x, y), bei denen der Gradient Null ist, $\nabla f = 0$.

Bestimmen Sie die kritischen Punkte der Funktion:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y - 2y - 2x.$$

Sie erhalten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Dieses nicht-lineare Gleichungssystem hat mehrere Lösungen!

Aufbage 3: (Charakterisierung eines kritischen Punktes)

Suchen Sie sich einen kritischen Punkt aus Aufgabe 2 aus. Jetzt ist die Frage: Handelt es sich um ein Minimum oder um ein Maximum oder um einen Sattelpunkt der Funktion? Am kritischen Punkt gilt: $dz = 0$. Wichtig ist, ob dz in einer kleinen Umgebung um den kritischen Punkt nun größer oder kleiner Null ist. Wächst oder sinkt also dz? Es liegt bei $d^2z > 0$ ein Minimum vor, denn die Funktion wächst in einer Umgebung um den Flachpunkt (d^2z kleiner Null: Maximum, die Funktion sinkt in einer Umgebung um den Flachpunkt). Da man jedoch in einer Umgebung von dem kritischen Punkt in verschiedene Richtungen gehen kann, kann es sein, dass d^2z in einer Richtung wächst, aber in einer anderen Richtung sinkt. Dann handelt es sich um einen Sattelpunkt.

a) Machen Sie die folgende Probe. Wählen Sie einmal $dx = \varepsilon,\ dy = \varepsilon$, mit einer als sehr klein gedachten Zahl ε. Rechnen Sie "in dieser Richtung" d^2z mit Hilfe der Hessematrix und der entsprechenden Formel aus Aufgabe 1 aus. Dann wählen Sie $dx = -\varepsilon,\ dy = \varepsilon$ und rechnen Sie erneut d^2z aus.

b) Überprüfen Sie die beiden Ergebnisse aus Aufgabenteil a) hinsichtlich des Vorzeichens von d^2z. Entscheiden Sie, ob der ausgesuchte kritische Punkt ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt ist!

Aufgabe 4: (Sattelpunktordnung)

Anstelle der (zufälligen) Proberichtungen in Aufgabe 3, kann man auch den kritischen Punkt durch Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren der Hessematrix der Funktion charakterisieren. *Die Hessematrix ist symmetrisch, hat also reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenvektoren.* Sind alle Eigenwerte größer Null, dann ist es ein Minimum. Sind alle Eigenwerte kleiner Null dann ist es ein Maximum. Ansonsten bestimmt die Anzahl der negativen Eigenwerte die sogenannte "Sattelpunktordnung". Die Eigenvektoren geben dabei die Richtung an, in die man dx und dy verändern muss, um das entsprechende Vorzeichen zu bekommen. Machen Sie diese Art von Analyse für die kritischen Punkte aus Aufgabe 2! **Viel Erfolg!**