FU Berlin: WiSe 15/16 (Mathematik II, Weber)

Zweite Teilklausur 29.03.2016 10:15 bis 11:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen!

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**20**	**35**	**20**	**25**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Mitte April) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- ☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
  - ☐ unter meiner Matrikelnummer
  - ☐ unter folgendem Kürzel: ______________________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

- ☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Kurvendiskussion in $\mathbb{R}^2$, 20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = \sin(y)\, x^2 + y^2$.

a) Bestimmen Sie den Gradient und die Hessematrix von f.

b) Zeigen Sie mit Hilfe eines Gleichungssystems, dass $(x, y) = (0,0)$ ein kritischer Punkt von f ist.

c) Begründen Sie anhand einer Eigenwertberechnung, ob es sich bei dem kritischen Punkt um ein Maximum, Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt. Im Fall eines Sattelpunktes: Geben Sie die Sattelpunktordnung an.

Aufgabe 2: (Lineare Differentialgleichungssysteme, 35 Punkte)

Zu lösen sei die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\ddot{x} = 3x + 2\dot{x}.$$

Eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich in ein lineares Differentialgleichungssystem mit 2 gesuchten Funktionen y_1 und y_2 umwandeln. Wir setzen dazu $y_1 = x$ und $y_2 = \dot{x}$. Damit bekommt die Gleichung die Form $\dot{y} = Ay$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, wie diese Matrix A zustande kommt. Hinweis: Schreiben Sie $\dot{y} = Ay$ als zwei Gleichungen auf und setzen sie obige Definitionen für y_1 und y_2 ein.

b) Welche zwei Eigenwerte und Eigenvektoren hat A?

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$?

d) Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x} = 3x + 2\dot{x}$?

Aufgabe 3: (Exakte Differentialgleichung, Kurvenintegral, 20 Punkte)

Es soll folgendes Kurvenintegral gelöst werden:

$$\int_C (2xe^y + 1)\, dx \; + x^2 e^y \, dy,$$

wobei C den Halbkreis mit Radius 1 von (1,0) nach (-1,0) durchläuft.

a) Zeigen Sie zunächst, dass $(2xe^y + 1)\, dx \; + x^2 e^y \, dy = 0$ eine exakte Differentialgleichung ist.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabenteil a). Hinweis: Sie dürfen die Lösung implizit angeben.

c) Berechnen Sie den Wert des obigen Kurvenintegrals.

Aufgabe 4: (Fourier-Transformation, 25 Punkte)

a) Sei $g(x) = f(ax)$ für eine geeignete Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine positive Konstante $a > 0$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformation gilt:

$$\mathcal{F}[g](\omega) = \frac{1}{a}\, \mathcal{F}[f]\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Hinweis: Substituieren Sie im Integral $z = ax$.

b) Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = -1$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ sonst, gegeben. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation lautet:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{2}{i\omega\sqrt{2\pi}}.$$

c) Schreiben Sie die Fourier-Transformierte der Differentialgleichung

$$f'' = 3f + 2f'$$

auf und stellen Sie die Gleichung nach $\mathcal{F}[f](\omega)$ um. Hinweis: $\mathcal{F}[f'](\omega) = i\omega\, \mathcal{F}[f](\omega)$.

Viel Erfolg!