FU Berlin: WiSe 15/16 (Mathematik II, Weber)

Zweite Teilklausur 09.02.2016 08:15 bis 09:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen!

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**20**	**40**	**15**	**25**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Ende Februar) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- ☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
  - ☐ unter meiner Matrikelnummer
  - ☐ unter folgendem Kürzel: ____________________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

- ☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Kurvendiskussion in $\mathbb{R}^2$, 20 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \sin(x) + (1-y)\,x$.

a) Bestimmen Sie den Gradient und die Hessematrix von f.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lösung eines Gleichungssystems einen kritischen Punkt (eine Flachstelle) von f.

c) Begründen Sie anhand einer Eigenwertberechnung, ob es sich bei dem kritischen Punkt um ein Maximum, Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt. Im Fall eines Sattelpunktes: Geben Sie die Sattelpunktordnung an.

Aufgabe 2: (Lineare Differentialgleichungssysteme, 40 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Eigenvektoren von A enthält. Wie lauten die Eigenwerte?

b) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ an.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\ddot{x} = Ax$ an.

Aufgabe 3: (Koordinatentransformation, Bereichsintegral, 15 Punkte)

Es soll folgendes Integral gelöst werden:

$$\int_B \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\, d(x,y),$$

wobei B die Fläche des Kreises um den Ursprung (als Mittelpunkt) mit Radius $\frac{\pi}{2}$ ist.

a) Transformieren Sie das Integral auf Polarkoordinaten. Passen Sie die Integralgrenzen an.

b) Berechnen Sie das Integral. Hinweis: Partielle Integration.

Aufgabe 4: (Fourier-Transformation, 25 Punkte)

a) Sei $g(x) = f(x+a)$ für eine geeignete Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformation gilt:

$$\mathcal{F}[g](\omega) = e^{ia\omega}\,\mathcal{F}[f](\omega).$$

Hinweis: Substituieren Sie im Integral $z = x + a$.

b) Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 1$ für $x \in [-1,1]$ und $f(x) = 0$ sonst, gegeben. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformation lautet:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Hinweis: Eulerformel. Geben Sie an, welche Symmetrien die Winkelfunktionen haben.

Viel Erfolg!