FU Berlin: WiSe 15/16 (Mathematik II, Weber)

Erste Teilklausur 12.12.2016 08:15 bis 09:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**30**	**30**	**15**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Mitte Januar) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- ☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
  - ☐ unter meiner Matrikelnummer
  - ☐ unter folgendem Kürzel: ____________________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

- ☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Eigenschaften von Permutationsmatrizen, 25 Punkte)

Permutationsmatrizen sind im Allgemeinen solche Matrizen, die durch das Vertauschen von Spalten einer Einheitsmatrix zustande kommen. Ein Beispiel für eine Permutationsmatrix ist:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Was ist die Determinante einer allgemeinen Permutationsmatrix, die durch n Vertauschungen von Spalten einer Einheitsmatrix erzeugt wurde? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist die oben angegebene Matrix P eine orthogonale Matrix? Stellt P eine volumentreue Abbildung dar? Stellt P eine spiegelfreie Abbildung dar? Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Falls die obige Matrix P eine Spiegelung oder eine Drehung darstellt, charakterisieren Sie diese Abbildung geometrisch, indem Sie die Spiegelebene bzw. die Drehachse angeben.

Aufgabe 2: (Lineares Gleichungssystem, 30 Punkte)

Gegeben seien:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\ , b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Bild und Kern der Matrix A.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung x des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ an.

c) Angenommen die allgemeine Lösung eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ habe die Form $x = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und gegebenen Vektoren u und v. Weiterhin sei das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ nicht der Nullvektor. Warum kann dann $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ nicht Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ sein? (Tipp: Kann der w-Vektor überhaupt in der Ebene liegen, die von dem u-Vektor und dem v-Vektor aufgespannt wird?)

Aufgabe 3: (Orthonormalsysteme, 30 Punkte)

Gegeben sei das folgende Skalarprodukt für reelle Funktionen:

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\ g(x)\,dx.$$

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die Funktion $f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$ die Länge 1 hat bezüglich des Skalarproduktes.

b) Gegeben sei weiterhin die Funktion $f_2(x) = \sin(x)$. Bilden f_1 und f_2 ein Orthonormalsystem bezüglich des gegebenen Skalarproduktes? Begründen Sie Ihre Ansicht. Hinweis: $\int \sin^2(x)\ dx\ = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + c$.

c) Geben Sie eine Funktion $\hat{f}_2$ an, so dass f_1 und $\hat{f}_2$ein Orthonormalsystem bilden, welches den Raum aller Funktionen des Typs $f(x) = a\sin(x) + b$ aufspannt.

Aufgabe 4: (Determinante, 15 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen des vierdimensionalen Parallelepipeds, das von den vier Spaltenvektoren der folgenden Matrix aufgespannt wird:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Bilden die vier gegebenen Vektoren in dieser Reihenfolge ein Rechts- oder ein Linkssystem? Begründen Sie Ihre Ansicht!

Viel Erfolg!