FU Berlin: WiSe 16/17 (Mathematik II, Weber)

Erste Teilklausur 28.03.2017 10:00 bis 11:30

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**30**	**30**	**15**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Mitte April) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet

☐ unter meiner Matrikelnummer

☐ unter folgendem Kürzel: ____________________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Eigenschaften von linearen Abbildungen, 25 Punkte)

Matrizenmultiplikation ist eine lineare Abbildung. Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Hängt die Determinante der Matrix von den reellen Zahlen a und b ab?

b) Stellt die Multiplikation mit A eine volumentreue Abbildung dar? Stellt A eine spiegelfreie Abbildung dar? Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Gibt es reelle Zahlen a und b, so dass die Matrix eine winkel- und längentreue Abbildung darstellt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: (Lineares Gleichungssystem, 30 Punkte)

Gegeben sei folgende chemische Reaktionsgleichung:

$$x_1\, H_2S \;+\; x_2\, SO_2 \;\longrightarrow\; x_3\, S_8 + \; x_4\, H_2O.$$

a) Stellen Sie die Bilanzgleichungen für die drei beteiligten Atomsorten auf. (Lineares Gleichungssystem, das die Beziehung zwischen den unbekannten stöchiometrischen Faktoren darstellt)

b) Schreiben Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems auf. Verwenden Sie dazu den Bild-Kern-Algorithmus.

c) Finden Sie eine ganzzahlige Lösung für die vier unbekannten stöchiometrischen Koeffizienten.

Aufgabe 3: (Orthonormalsysteme, 30 Punkte)

Gegeben sei das folgende Skalarprodukt für reelle Funktionen f und g:

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\; g(x)\, dx.$$

Gegeben seien weiterhin die drei reellwertigen Funktionen:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad v_2 = \mathrm{x}, \; v_3 = \mathrm{x}^2.$$

a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die Funktion v_1 die Länge (den Betrag) 1 hat bezüglich des Skalarproduktes.

b) Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren und schreiben Sie die Schritte dieses Verfahrens auf, um aus $v_1,\ v_2,\ v_3$ ein Orthonormalsystem zu machen. Wie lautet dieses Orthonormalsystem?

c) Projizieren Sie die Funktion $v_4 = x^3$ auf das Orthonormalsystem aus Aufgabenteil 3b).

Aufgabe 4: (Determinante, 15 Punkte)

a) Welches Volumen hat ein Parallelepiped, das von den folgenden vier Vektoren aufgespannt wird? Geben Sie die Rechnung an!

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) In welcher Reihenfolge bilden die vier Vektoren ein Rechtssystem (bitte nur eine der vielen Möglichkeiten nennen)? Begründen Sie!

Viel Erfolg!

FU Berlin: WiSe 16/17 (Mathematik II, Weber)

Zweite Teilklausur 28.03.2017 11:30 bis 13:00

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**30**	**20**	**25**	**25**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Mitte April) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet

☐ unter meiner Matrikelnummer

☐ unter folgendem Kürzel: ____________________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Diagonalisierbarkeit von Matrizen, 30 Punkte)

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0{,}5 & 1 & 1{,}5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix A. Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1$ ein Eigenwert von der Matrix A ist. Geben Sie den Rechenweg an!

b) Rechnen Sie alle Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren der Matrix A aus. Geben Sie den Rechenweg (Polynomdivision, Bild-Kern-Algorithmus) an!

c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Geben Sie die Begründung an.

Aufgabe 2: (Lineares Differentialgleichungssystem, 20 Punkte)

Geben Sie *zwei* Lösungen $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$ des linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = Ax$ an, wobei die eine Lösung nicht ein Vielfaches der anderen Lösung ist. Die Matrix A ist gegeben als:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dabei auch den Rechenweg an.

Aufgabe 3: (Wegunabhängiges Kurvenintegral, 25 Punkte)

Zu berechnen ist folgendes Kurvenintegral:

$$\int_C (\cos(\mathrm{x})\,\mathrm{y} + 2\mathrm{x})\ dx + \ \sin(\mathrm{x})\,\mathrm{dy},$$

wobei die Kurve C einen Halbkreis um den Ursprung vom Anfangspunkt $(-\pi; 0)$ bis zum Endpunkt $(\pi; 0)$ beschreibt.

a) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der Exaktheitsbedingung, dass das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

b) Finden Sie alle Funktionen $z(x,y)$, deren totales Differential

$$dz = (\cos(\mathrm{x})\,\mathrm{y} + 2\mathrm{x})\,dx + \sin(\mathrm{x})\,\mathrm{dy}$$

lautet. Geben Sie den Rechenweg an.

c) Berechnen Sie das Kurvenintegral.

Aufgabe 4: (Fouriertransformation, 25 Punkte)

Gegeben sei die eindimensionale Potentialgleichung

$$-u'' + cu = f,$$

wobei $c > 0$ eine gegebene reelle Konstante sein soll und u und f von x abhängen. f wird als gegeben vorausgesetzt, u sei die zu suchende Lösung.

a) Zunächst berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Potentialgleichung. Zeigen Sie, dass für die Potentialgleichung gilt:

$$\omega^2\,\mathcal{F}[u] + c\,\mathcal{F}[u] = \mathcal{F}[f]. \qquad (*)$$

b) Lösen Sie $(*)$ nach u auf, indem Sie die inverse Fourier-Transformation anwenden:

$$\mathcal{F}^{-1}\big[\mathcal{F}[u]\big] = u.$$

Wie lautet also letztendlich die Lösungsformel für die Gleichung?

c) Sie haben gelernt, dass $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} e^{-\sqrt{c}|x|}$ die inverse Fourier-Transformierte von der Funktion $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\omega^2 + c}$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe des "Faltungsgesetzes" $\mathcal{F}[f]\,\mathcal{F}[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\big[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy\big]$, dass die Lösung der eindimensionalen Potentialgleichung lautet:

$$u(x) = \frac{1}{2\sqrt{c}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, e^{-\sqrt{c}|y|}\, dy.$$

Viel Erfolg!