FU Berlin: WiSe 15/16 (Mathematik II, Weber)

Erste Teilklausur 09.02.2016 08:15 bis 09:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen!

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**20**	**30**	**25**	**25**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Ende Februar) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- [ ] Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
    - [ ] unter meiner Matrikelnummer
    - [ ] unter folgendem Kürzel: ______________________

oder sonst gilt der „Normalfall"

- [ ] Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Eigenschaften linearer Abbildungen, 20 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in [0, \pi].$$

a) Ist die Matrix S_α orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Rechnung.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix S_α. Begründen Sie mit Hilfe der Determinante: Stellt S_α eine volumentreue Abbildung dar? Stellt S_α eine spiegelfreie Abbildung dar?

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von S_α.

d) S_α stellt eine Achsenspiegelung dar. Ohne Rechnung und ohne Begründung: Wie verlaufen die zwei Eigenvektoren von S_α bezüglich der Spiegelachse?

Aufgabe 2: (Lineare Gleichungssysteme, 30 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

und die beiden Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Bild und Kern der Matrix A.

b) Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $x \in \mathbb{R}^4$ lösbar?

c) Ist das lineare Gleichungssystem $Ax = \hat{b}$ für $x \in \mathbb{R}^4$ lösbar? Wenn ja, wie lautet die allgemeine Lösung des Gleichungssystems?

Aufgabe 3: (Orthonormalsysteme, 25 Punkte)

Die beiden Funktionen $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$ bilden ein Orthonormalsystem (ONS) bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx.$$

a) Ohne Rechnung: Welchen Wert haben die folgenden Skalarprodukte $\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle$, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ bzw. $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle$?

b) Projizieren Sie die Funktion $f(x) = x^2$ auf das obige ONS mittels $\Pi f = \sum_{i=1}^{2} \langle f, \varphi_i \rangle\, \varphi_i$. Bilden Sie das Residuum $\varphi_3 = \Pi f - f$. Zeigen Sie, dass φ_3 orthogonal zu $\varphi_1$und $\varphi_2$ist.

c) Sei $g: [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion und stelle Πg eine Projektion von g auf ein ONS gemäß obigen Skalarproduktes dar. Welchen Wert nimmt dann die Funktion $\Pi(\Pi g - g)$ an? Begründen Sie.

Aufgabe 4: (Eigenwerte/Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit, 25 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(Tipp: Ein Eigenwert lautet $\lambda_1 = 3$).

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert die zugehörigen Eigenvektoren.

c) Warum ist A diagonalisierbar?

Viel Erfolg!