FU Berlin: WiSe 16/17 (Mathematik II, Weber)

Erste Teilklausur 13.02.2017 08:15 bis 09:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**30**	**25**	**25**	**20**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Anfang März) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- ☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
  - ☐ unter meiner Matrikelnummer
  - ☐ unter folgendem Kürzel: ______________________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

- ☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Diagonalisierbarkeit von Matrizen, 30 Punkte)

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -2 & 10 & -2 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 12$ Eigenwerte von der Matrix A sind, indem Sie jeweils ausrechnen, dass die Determinante von $A - \lambda I$ Null ist. Geben Sie jeweils den Rechenweg an!

b) Rechnen Sie mit Hilfe des Bild-Kern-Algorithmus die Eigenvektoren zu den jeweiligen Eigenwerten aus. Welche geometrische Vielfachheiten haben die Eigenwerte?

c) In der obigen Matrix sind $\lambda_1 = 6$ und $\lambda_2 = 12$ die einzigen Nullstellen des charakteristischen Polynoms (diese Tatsache müssen Sie nicht zeigen). Ist die Matrix A also diagonalisierbar? Begründen Sie mit Hilfe der geometrischen Vielfachheiten aus Teilaufgabe b).

Aufgabe 2: (Kritische Punkte von mehrdimensionalen Funktionen, 25 Punkte)

Gegeben sei folgende zweidimensionale, reelle Funktion

$$f(x, y) = \sin(x) + \; y\,(x - \pi).$$

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f.

b) Berechnen Sie einen kritischen Punkt der Funktion f.

c) Handelt es sich bei dem kritischen Punkt aus Aufgabenteil b) um ein Minimum, Maximum oder um einen Sattelpunkt? Begründen Sie mit Hilfe einer Eigenwertanalyse der Hessematrix.

Aufgabe 3: (Wegunabhängiges Kurvenintegral, 25 Punkte)

Zu berechnen ist folgendes Kurvenintegral:

$$\int_C \mathrm{e}^{\mathrm{x+y}}\ dx + \ (\mathrm{e}^{\mathrm{x+y}} + \ 3\mathrm{y}^2)\ \mathrm{dy},$$

wobei die Kurve C einen Halbkreis um den Ursprung vom Anfangspunkt $(-1; 0)$ bis zum Endpunkt $(1; 0)$ beschreibt.

a) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der Exaktheitsbedingung, dass das Kurvenintegral wegunabhängig ist.

b) Finden Sie alle Funktionen $z(x, y)$, deren totales Differential

$$dz = \ \mathrm{e}^{\mathrm{x+y}}\ dx + \ (\mathrm{e}^{\mathrm{x+y}} + \ 3\mathrm{y}^2)\ \mathrm{dy}$$

lautet. Geben Sie den Rechenweg an.

c) Zeigen Sie durch Rechnung, dass das Kurvenintegral den Wert $e - \frac{1}{e}$ hat.

Aufgabe 4: (Faltungssatz der Fouriertransformation, 20 Punkte)

Bewiesen werden soll der Faltungssatz:

$$\mathcal{F}[f * g] = \sqrt{2\pi}\ \ \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g].$$

a) Die Faltung einer Funktion bzw. die Fourier-Transformation sind definiert als:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\ \ g(y)\ dy \qquad\qquad \mathcal{F}[h](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\ e^{-i\omega x}\ dx.$$

Schreiben Sie in Form eines (Doppel-)Integralausdruckes auf, was $\mathcal{F}[f * g](\omega)$ ist.

b) Führen Sie in dem Integral aus Teilaufgabe a) eine Substitution $s = x - y$ durch, so dass in dem Integralausdruck nur noch die Variablen y und s bzw. dy und ds auftauchen.

c) Verwenden Sie $e^{-i\omega(y+s)} = \ e^{-i\omega y}\ e^{-i\omega s}$. Alle Ausdrücke in dem entstehenden zweidimensionalen Bereichsintegral in Teilaufgabe b) sind entweder nur von y oder nur von s abhängig. Schreiben Sie den Integralausdruck also als Produkt von zwei eindimensionalen Integralen und beenden Sie so den Beweis des Faltungssatzes.

Viel Erfolg!