Aufgabe 1: (Rotationsmatrizen, 20 Punkte)

Gegeben sei die Rotationsmatrix

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in [0, \pi].$$

a) Ist die Matrix orthogonal? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Rechnung.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix R_α. Stellt R_α eine volumentreue, spiegelfreie Abbildung dar?

c) Berechnen Sie die Eigenwerte von R_α.

Aufgabe 2: (Lineares Gleichungssystem, 10 Punkte)

Bestimmen Sie ganzzahlige stöchiometrische Koeffizienten $\boldsymbol{x_1, \dots, x_6}$ der folgenden Reaktionsgleichung (Entfernung von Chlor in Bleichprozessen), so dass die Massenbilanz passt:

$$\boldsymbol{x_1\ Na_2S_2O_3 + x_2\ Cl_2 + x_3\ H_2O \ \rightarrow x_4\ Na_2SO_4 + x_5\ H_2SO_4 + x_6\ HCl}$$

Aufgabe 3: (Orthonormalsysteme, Projektionsmatrizen, 40 Punkte)

Gegeben seien die folgenden beiden Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{v}_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $v_1, \hat{v}_2$ ein Orthonormalsystem (ONS) bilden.

b) Gegeben sei ein weiterer Vektor $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$. Führen Sie für das Orthonormalsystem $\{v_1, \hat{v}_2\}$ und für den Vektor v_3 den Gram-Schmidt-Algorithmus durch und berechnen Sie mit dessen Hilfe $\hat{v}_3$, so dass $\{v_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ ein Orthonormalsystem bilden.

c) Stellen Sie die Projektionsmatrix Π auf, die eine Projektion eines 4-dimensionalen Vektors auf die Ebene darstellt, die von den beiden Vektoren v_1 und $\hat{v}_2$ aufgespannt wird.

d) Begründen Sie ohne Rechnung: Welchen Wert hat die Determinante von Π?

Aufgabe 4: (Eigenwerte/Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit, 30 Punkte)

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Tipp: Zeigen Sie zunächst durch ausführliche Rechnung, dass das charakteristische Polynom der Matrix $(2-\lambda)^3$ lautet).

b) Warum ist die Matrix A nicht diagonalisierbar?

Viel Erfolg!