Häusliche Klausur, FU Berlin, Mathematik II, M. Weber.

Datum: 22.3.2021

Prüfungszeit: von 10:00 bis 13:00

Bitte senden Sie die Lösungen zu den Aufgaben 1-8 per Post an mich (Marcus Weber, Zuse Institute Berlin (ZIB), Takustraße 7, 14195 Berlin). Beachten Sie die Angaben zu dem Prozedere der Klausur auf der Homepage der Vorlesung. Denken Sie daran, die Selbständigkeitserklärung zu unterschreiben und mitzusenden! Bewahren Sie Fotografien Ihrer Lösungsblätter auf!

Bitte senden Sie die Antworten zur „Aufgabe 9" per eMail an mich (Betreffzeile der eMail: Ihre Matrikelnummer, Einsendung vor 13:30!).

VORAB: Schreiben Sie die Ziffern 1 bis 8 jeweils auf kleine Zettelchen (z.B. einen Zettel zerreißen). Mischen Sie die Zettelchen gut durch und ziehen Sie eine zufällige Reihenfolge der acht Ziffern. WICHTIG: Notieren Sie sich die Reihenfolge in der Sie die acht Ziffern gezogen haben!

Aufgabe 1 (Orthonormalsystem, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die erste Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein!

Führen Sie mit ausführlichem Rechenweg das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt an folgenden beiden Funktionen durch:

$$f(x) = e^{iZx} \quad g(x) = 1.$$

Verwenden Sie dabei als Skalarprodukt $\langle a|b\rangle$ das Integral über x in den Grenzen von 0 bis 2π. Beachten Sie, dass Sie im „$\langle a|$"-Teil des Skalarproduktes mit konjugieret komplexen Zahlen rechnen müssen!

Aufgabe 2 (Lineare Gleichungssysteme, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die zweite Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein.

a) Bestimmen Sie das Gleichungssystem für die stöchiometrischen Faktoren, das Sie verwenden, um für die folgende Reaktionsgleichung die Massenbilanz auszugleichen:

$$x_1\, Fe_2O_3 + x_2\, C \rightarrow x_3\, Fe + x_4\, CO$$

Schreiben Sie dazu die entsprechende Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems auf!

b) Rechnen Sie den Kern der Matrix A mit Hilfe des Bild-Kern-Algorithmus als allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems aus!

c) Erklären Sie, warum aufgrund der Oxidationszahlen der beteiligten Stoffe folgende weitere Gleichung gelten muss:

$$6x_1 - 2x_2 = 0.$$

Prüfen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung in der Lösung, die Sie in b) berechnet haben.

d) Wenn ein lineares Gleichungssystem 9 Unbekannte und Z Gleichungen aufweist, was lässt sich dann über die Lösbarkeit dieses Systems und die Dimension des Kerns sagen?

Aufgabe 3 (Mehrdimensionale Determinante, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die dritte Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer überall anstelle der Z ein.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2+Z & Z & Z \\ Z & -1 & 1 & 1+Z \\ 0 & 2 & Z & Z \end{pmatrix}$.

- **a)** Im Gegensatz zur Aufgabe 2, in der nur Spaltenumformungen im Bild-Kern-Algorithmus durchgeführt werden dürfen, kann man Determinanten mit Hilfe von Spalten- UND Zeilenumformungen berechnen. Nennen Sie den mathematischen Grund dafür, dass beides möglich ist! (Die Angabe der Lösung ist z.B. durch Nennen einer bestimmten Formel möglich)
- **b)** Berechnen Sie die Determinante der Matrix A, indem Sie sowohl Zeilen- als auch Spaltenumformungen nutzen, um auf eine „Dreiecksform" zu kommen.
- **c)** Der Wert der Determinante in b) ist Null. Nennen Sie eine mögliche Schlussfolgerung über die vier Spaltenvektoren in A, die Sie aus dieser Tatsache ableiten können.

Aufgabe 4 (Kurvendiskussion in $\mathbb{R}^2$, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die vierte Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein.

Gegeben sei der Vektor $\boldsymbol{x} = \binom{x_1}{x_2}$ und die Funktion: $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}\left({x_1}^3 + Z{x_2}^3\right) - x_1 - Zx_2$

- **a)** Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von der Funktion $f(\boldsymbol{x})$.
- **b)** Berechnen Sie alle kritischen Punkte der Funktion $f(\boldsymbol{x})$.
- **c)** Bestimmen Sie für jeden Punkt aus b), ob es sich dabei um ein Minimum, Maximum oder um einen Sattelpunkt handelt.
- **d)** Die „Schmiegequadrik" einer Funktion f(**x**) berechnet sich wie folgt:
$$Q(\boldsymbol{x}) = f(\tilde{\boldsymbol{x}}) + \nabla f(\tilde{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})^T\, H_f(\tilde{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}).$$
Nehmen Sie einen der kritischen Punkte aus Aufgabenteil b) und rechnen Sie die Schmiegequadrik (als Polynom 2. Grades in x_1 und x_2) für diesen Punkt $\tilde{x}$ aus.

Aufgabe 5 (Lineare Differentialgleichungssysteme, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die fünfte Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein.

Gegeben sei folgende Koeffizientenmatrix eines linearen Differentialgleichungssystems:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ -Z & 0 \end{pmatrix}.$$

- **a)** Rechnen Sie ausführlich die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ aus!
- **b)** Formen Sie alle Exponentialausdrücke in der Lösung aus a) mit Hilfe der Eulerformel in trigonometrische Funktionen um!

Aufgabe 6 (Kurvenintegral zweiter Art, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die sechste Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein!

Denken Sie sich ein zweidimensionales (also mit dx und dy) Kurvenintegral zweiter Art aus, das im Integranden (an irgendeiner Stelle) den Ausdruck x^Z enthält und wegunabhängig ist. Begründen Sie die Wegunabhängigkeit und geben Sie alle Potentialfunktionen des Integrals an!

Aufgabe 7 (Eigenschaften von Matrizen, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die siebte Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein.

Gegeben sei folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Stellt die Matrix A eine längen- und winkeltreue Abbildung dar? Ist die Abbildung orientierungstreu? Ist die Matrix A selbst-adjungiert? Begründen Sie jeweils!

b) Hier bitte nicht ausrechnen, sondern nur die Lösungsmethode angeben: Wenn eine Matrix eine Rotation im 3-dimensionalen Raum um eine Drehachse und mit einem bestimmten Drehwinkel darstellt, wie kann man dann die Rotationsachse und den Drehwinkel aus der gegebenen Matrix ausrechnen?

c) Nennen Sie die 3-dimensionale Matrix, die eine zentrische Streckung am Ursprung mit Streckfaktor (1+Z) darstellt. (Basisvektoren sind die drei Einheitsvektoren)

Aufgabe 8 (Normalgebiet, 25 Punkte): Für diese Aufgabe verwenden Sie die achte Ziffer, die Sie vorab gezogen haben. Setzen Sie diese Ziffer anstelle des Z ein.

Rechnen Sie den Wert des folgenden Integrals aus:

$$\int_B (x^2 + y^2)\, d(x, y),$$

wobei das Normalgebiet B so gewählt wird, dass es im zweidimensionalen Raum dem Dreieck zwischen den Punkten (0; 0), (Z; 0) und (Z; Z) entspricht (Tipp: Fertigen Sie eine Skizze des Normalgebietes an, dann sehen Sie, wie Sie es als Grenzen des Integrals schreiben können, dabei hängen die Grenzen in y-Richtung von der x-Koordinate ab)

BITTE NACH DER LÖSUNG DER OBIGEN AUFGABEN SORGFÄLTIG LESEN UND GEWISSENHAFT BEANTWORTEN:

„Aufgabe 9:“

a) Wie viele Seiten umfassen Ihre eingesendeten Lösungsblätter insgesamt?

b) Haben Sie alle Teilaufgaben bearbeitet? Wenn nein: Welche Teilaufgaben haben Sie nicht bearbeitet?

c) Haben Sie Textpassagen auf den Lösungsblättern durchgestrichen? Wenn ja: Auf welchen Seiten haben Sie Textpassagen durchgestrichen?

d) Welche Art(en) und Farbe(n) von Stift(en) haben Sie verwendet?

e) Auf welcher Seite/welchen Seiten steht die Lösung zu Aufgabe 3?

f) Auf welcher Seite/welchen Seiten steht die Lösung zu Aufgabe 5?

g) In welcher Reihenfolge haben Sie die acht Ziffern gezogen?