Aufgabe 8 hätte man auch analytisch lösen können.

Die DGL $f'(x) \cdot f(x) = x^2$ kann auch geschrieben werden als $y' \cdot y = x^2$.

Dieses führt zu der exakten Differentialgleichung

$$y'y = x^2 \Leftrightarrow \boxed{y\,dy - x^2\,dx = 0}$$

(Trennung der Variablen)

Mit den bekannten Lösungsmethoden bekommt man:

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{c + x^3}.$$

Um die Anfangsbedingung zu erfüllen, ist $c = \frac{1}{2}$ zu wählen. Also:

$$\boxed{f(x) = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x^3}}$$