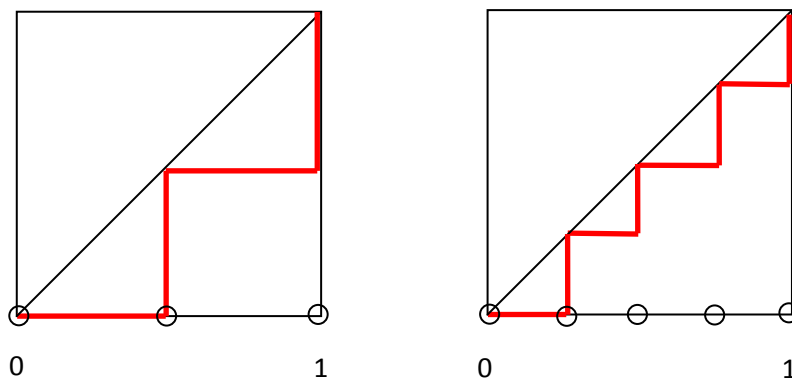


Dieses ist mein Versuch, das [Diagonal-Paradoxon](#) aufzulösen. Normalerweise lernen Studierende die Begriffe "Länge einer Kurve" (zu deren Berechnung die Funktion, die die Kurve darstellt, differenzierbar sein muss) und "gleichmäßige Konvergenz" (wodurch dann klar wird, dass die so konstruierte "Diagonale" nicht-differenzierbar ist und daher "keine Länge hat"). Wir hatten jedoch vermieden, die Begriffe "nicht-differenzierbar" und "gleichmäßige Konvergenz" in der Vorlesung formal einzuführen.

Ich möchte einen Erklärungsansatz liefern, der sich an einer (nicht unumstrittenen) Gedankenströmung der Mathematik anlehnt, dem ["Finitismus"](#). Die folgende Begründung hätte allerdings aber schon Euklid geben können, so dass sie sich vielleicht für eine Grundvorlesung in Mathematik eignet...

Machen wir uns einen Schritt aus dem Konstruktionsprinzip des Diagonal-Paradoxons noch einmal klar.



Wie man sieht, "setzt" das Konstruktionsverfahren in jedem Schritt mehr und mehr Punkte der Grundlinie des Quadrates auf die Diagonale (hier durch kleine Kreise dargestellt). Das geschieht, indem die Grundlinie zunächst in 2, dann in 4, dann in 8 usw. Teilstrecken aufgeteilt wird. Finitismus: Würde das Verfahren "wirklich" eine Diagonale konstruieren, dann müsste also irgendwann jeder Punkt der Grundlinie auf die Diagonale gesetzt werden. Das Verfahren kann aber nur rationale Zahlen zwischen 0 und 1 konstruieren (wegen der Halbierungen). Wenn man sich also fragt, in welchem Schritt des Verfahrens die irrationale Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$, die ebenfalls zwischen 0 und 1 liegt, auf die Diagonale gesetzt wird, dann geschieht dieses nie (in keinem Schritt). Daher wird keine "echte" Diagonale konstruiert. Nur nach dem Verfahren konstruierte rationale Zahlen liegen auf der "unechten" Diagonalen. Für Nicht-Finitisten folgt eine alternative Begründung.

Hyperreelle Zahlen: Zwar wird die reelle Zahl $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in keinem Schritt auf die Diagonale gesetzt, dennoch nähern sich die "roten Funktionen" immer näher der Diagonalen an (so auch an der Stelle $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Die rote Linie sollte sich aber nicht nur im Bereich der reellen Zahlen an die Diagonale annähern, sondern auch im Bereich der hyperreellen Zahlen. Der Punkt (0;0) "sitzt schon von Anfang an auf der Diagonalen". Was ist aber mit infinitesimalen Punkten? Der Ausdruck $\frac{1}{2^n}$ stellt für ein infinites (unendlich großes) n eine infinitesimale Zahl α dar. Dieser Punkt liegt auf der konstruierten roten "Grenzlinie" des Konstruktionsverfahrens, da für jedes finite n irgendwann der Punkt $\frac{1}{2^n}$ durch das Streckenhalbungsverfahren auf der Diagonalen landet und damit (Nicht-Finitismus) auch für ein

unendlich großes n . Aber auch der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{p_n}}$, wobei p_n die n -te Primzahl sein soll, stellt für ein unendlich großes n eine infinitesimale Zahl β dar. Diese liegt allerdings nach obiger Begründung (wegen der Irrationalität) weiterhin auf der Grundlinie. Da man die "Grenzfunktion" in dem Punkt $(0;0)$ nicht stetig nach den hyperreellen Zahlen fortsetzen kann, ist es keine Diagonale.