

Lösungshinweis zu Aufgabe 4 auf dem 2. Übungszettel

Soll eine Gleichung der Form

$$x \cdot a + b = x \cdot c + d$$

für gegebene Elemente a, b, c, d aus einem Körper K nach x aufgelöst werden, dann gibt es grundsätzlich drei Möglichkeiten:

1. Ausprobieren
2. Lösungsformel verwenden
3. Gleichung umformen

Ausprobieren

Da der Körper aus Aufgabe 4 ja nur aus drei Elementen $[0]$, $[1]$ und $[2]$ besteht, kann man durch Ausprobieren heraus bekommen, wie x aussehen muss, um die Gleichung zu lösen. Hier nochmal der Körper aus der Aufgabe:

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

.	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Lösungsformel

In der Vorlesung hatten wir die Lösungsformel für diese Gleichung hergeleitet:

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

Da es in dem Körper aber nur Multiplikation und Addition gibt, muss man diese Lösungsformel umschreiben:

$$x = (a + (-c))^{-1} \cdot (d + (-b)).$$

Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $[1]x + [2] = [2]$ nach x auf. Einsetzen in die Formel ergibt ($a=[1]$, $b=[2]$, $c=[0]$, $d=[2]$)

$$x = ([1] + (-[0]))^{-1} \cdot ([2] + (-[2])).$$

Jetzt muss man jeweils die inversen Elemente berechnen. Zunächst die inversen Elemente bezüglich der Addition $(-[0])=[0]$ und $(-[2])=[1]$. Wie kommt man z.B. darauf, dass das inverse Element von $[2]$ das Element $[1]$ ergibt? Dazu muss man in der "+"-Tabelle in der $[2]$ -Zeile nachschauen, in welcher Spalte die $[0]$ steht. Denn $[0]$ ist das neutrale Element der Addition. Die $[0]$ steht in der $[2]$ -Zeile unter der $[1]$.

Bisher also:

$$x = ([1] + (-[0]))^{-1} \cdot ([2] + (-[2])) = ([1] + [0])^{-1} \cdot ([2] + [1]) = [1]^{-1} \cdot [0]$$

Jetzt schaut man nach den inversen Elementen der Multiplikation nach, denn man muss $[1]^{-1}$ berechnen. Das inverse Element der Multiplikation bekommt man, indem man in der Multiplikationstabelle in der $[1]$ -Zeile den Eintrag $[1]$ sucht. Denn das neutrale Element der Multiplikation ist $[1]$. Fündig wird man in der $[1]$ -Spalte, daher $[1]^{-1}=[1]$. Damit erhält man die Lösung:

$$x = [1]^{-1} \cdot [0] = [1] \cdot [0] = [0].$$

Umformen der Gleichung

Der "Königsweg" ist natürlich die Umformung der Gleichung, indem man x auf eine Seite bringt. Das geht am Beispiel der Gleichung

$$[1]x + [2] = [2]$$

so:

Auf beiden Seiten $[1]$ (von rechts) addieren; man erhält

$$[1]x + [2] + [1] = [2] + [1].$$

Ausrechnen $([2]+[1])$ ergibt $[0]$ (das neutrale Element der Addition):

$$\Leftrightarrow [1]x + [0] = [0]$$

$$\Leftrightarrow [1]x = [0]$$

Wir sind schon fertig, da $[1]x = x$ gilt:

$$x = [0]$$