FU Berlin: WiSe 10/11 (Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, Weber)

Definitionen-Zettel Nr. 4

Lernziel: Gruppen und Körper.

Definition 4.1: Eine **Gruppe** (G, ∘) ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ: G \times G \to G$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(G1) $\circ: G \times G \to G$ ist **assoziativ**, d.h. für alle $a, b, c \in G$ gilt: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
(G2) Es gibt ein (links)**neutrales Element** $e \in G$, d.h. für alle $a \in G$ gilt $e \circ a = a$.
(G3) Jedes Element $a \in G$ hat ein (links)**inverses Element** $a^{-1} \in G$ mit $a^{-1} \circ a = e$.

Ist die Verknüpfung **kommutativ**, d.h. es gilt $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$, dann nennt man die Gruppe **abelsch.**

Definition 4.2: Ein **Körper** (K, +, ·) ist eine Menge K mit zwei Verknüpfungen, $+: K \times K \to K$ und $\cdot: K \times K \to K,$ für die gilt:

(K1) (K,+) ist eine abelsche Gruppe.
(K2) Ist 0 das neutrale Element von (K,+), dann bildet (K\{0},·) eine abelsche Gruppe.
(K3) Es gilt das **Distributivgesetz.** Für alle $a, b, c \in K$gilt: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Definition 4.3: Der Körper $\mathbb{C}$ **der komplexen Zahlen** ist die Menge der Zweier-Tupel reeller Zahlen $\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit zwei Verknüpfungen, $+: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $\times: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C},$ für die gilt:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_x b_x - a_y b_y \\ a_x b_y + a_y b_x \end{pmatrix}.$$