FU Berlin: SoSe 11 (Elementargeometrie, Weber)

Erstklausur 8.7.2011 12:15 bis 13:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den übrigen Blättern und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus fünf Aufgaben und einer Bonusaufgabe. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100(+10) Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen!

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schmierpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Die Einsicht in die Beurteilung der Klausuren geschieht ausschließlich am 15.7.2011 von 12-14 Uhr im Hörsaal der Vorlesung. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**10**	**100(+10)**
Erreichte Punktzahl							

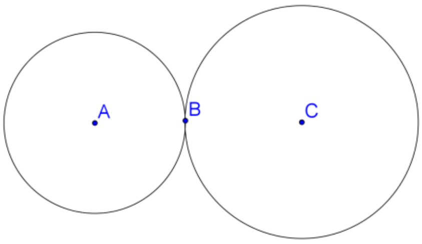
Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Aufgabe 1: (Konstruktion mit Zirkel und Lineal, 20 Punkte)

a) Es gilt: $\cos\left(\frac{360°}{17}\right) = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}$.

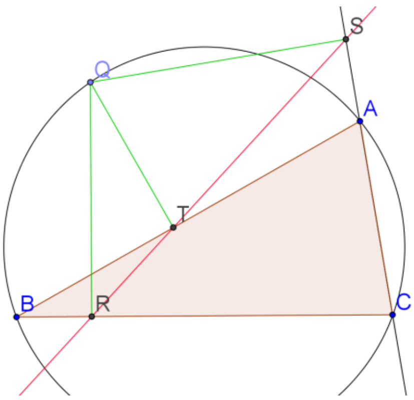
Lässt sich das regelmäßige 17-Eck mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruieren? Begründen Sie!

b) Gegeben seien zwei Kreise (mit ihren Mittelpunkten), die sich in einem Punkt berühren. Das Innere der Kreise soll sich dabei nicht überscheiden:



Wie konstruieren Sie mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals die gemeinsamen Tangenten dieser Kreise? Skizzieren Sie!

Aufgabe 2: (Elementargeometrisches Beweisen, 20 Punkte)



Der folgende Satz soll bewiesen werden: „Der Punkt Q liege auf dem Umkreis eines Dreiecks ΔABC. Dann gilt, dass die Fußpunkte (R,S,T) der von Q auf die Dreiecksseiten gefällten Lote auf einer Geraden liegen.“ Gehen Sie bei dem Beweis folgendermaßen vor:

a) Zeigen Sie, dass unter den obigen Voraussetzungen QTAS ein Sehnenviereck ist (beachten Sie die Summe gegenüberliegender Winkel).

b) Zeigen Sie, dass auch QBRT ein Sehnenviereck ist. Skizzieren Sie die beiden Umkreise der Sehnenvierecke aus a) und b).

c) Zeigen Sie die Gleichheit der Winkel ∡ATS = ∡AQS, sowie der Winkel ∡BQR = ∡BTR

d) Zeigen Sie unter Ausnutzen von Winkelsummen (z.B. ∡QBC+∡QAC), dass ∡ATS=∡BTR und folgern Sie daraus dass ∡RTS=180°.

Aufgabe 3: (Dynamische Geometriesoftware, 20 Punkte)

a) Nennen Sie eine Möglichkeit, mit wenigen Schritten und mit Hilfe von GeoGebra den Feuerbachkreis eines Dreiecks zu konstruieren!

b) Neben der klassischen (euklidischen) Konstruktion mit Zirkel und Lineal lässt GeoGebra auch dynamische (archimedische) Konstruktionen zu. Wie lässt sich dieses beispielhaft verdeutlichen? Skizzieren Sie dazu stichpunktartig das Aussehen eines entsprechenden dynamischen Arbeitsblattes!

Aufgabe 4: (Transformationen der Ebene, 20 Punkte)

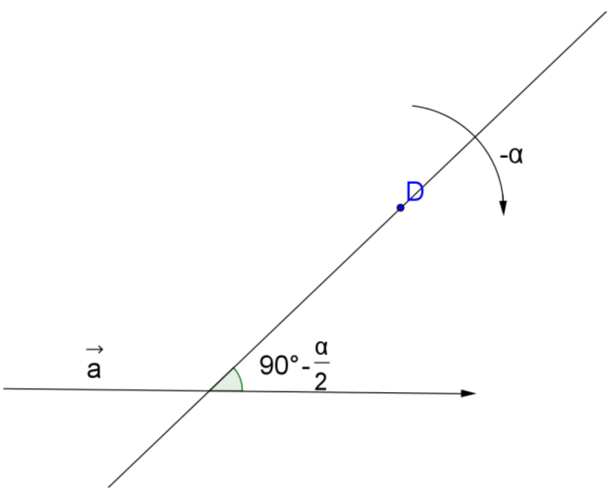
a) Handelt es sich bei der folgenden affinen Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\binom{x}{y} + \binom{2}{2}$$

um eine Isometrie? Ist f eine orientierungstreue Abbildung? Begründen Sie jeweils!

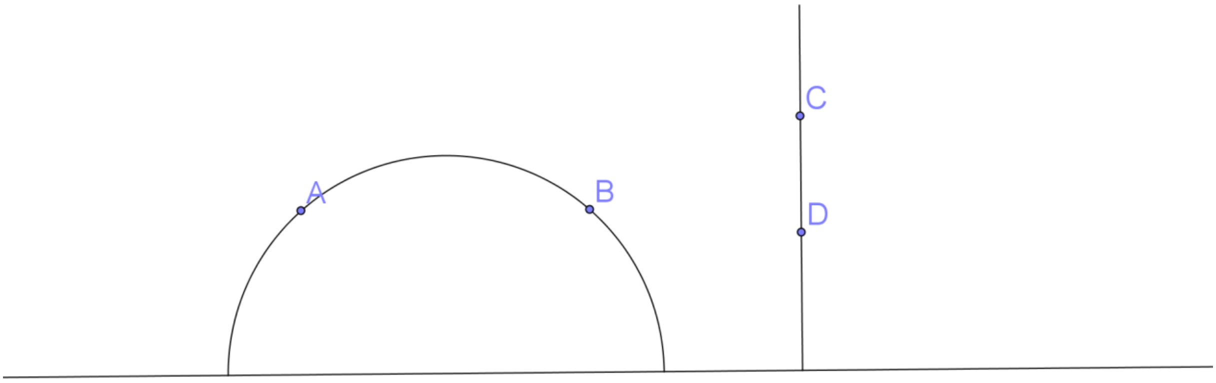
b) Die Abbildung $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = az$ stellt eine Drehstreckung dar. Berechnen Sie den Drehwinkel und den Streckfaktor für $a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Wie müsste $a \in \mathbb{C}$ aussehen, wenn g eine Drehung um 90° mit einem Streckfaktor von 2 darstellen soll?

c) Betrachten Sie die Verkettung folgender Isometrien: Zunächst wird eine Translation um den Vektor $\vec{a}$ ausgeführt. Danach wird eine Drehung um das Drehzentrum D mit dem Drehwinkel $-\alpha$ getätigt. Schließlich wird an einer Geraden G, die durch D verläuft und mit $\vec{a}$ einen Winkel von $90° - \frac{\alpha}{2}$ einschließt, eine Achsenspiegelung durchgeführt. Stellen Sie die resultierende Isometrie durch Achsenspiegelung(en) dar!



Aufgabe 5: (Hyperbolische Geometrie, 20 Punkte)

Im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie entsprechen die hyperbolischen Geraden genau den verallgemeinerten (Halb-) Kreisen, die die reelle Achse orthogonal schneiden. Eine hyperbolische Achsenspiegelung an einer solchen hyperbolischen Geraden kann man sich also als „Inversion am Kreis" (für A,B) oder als „normale Achsenspiegelung" (für C, D) denken. Zeigen Sie, dass durch eine hyperbolische Achsenspiegelung hyperbolische Geraden wieder in hyperbolische Geraden übergehen!



Aufgabe 6: (Bonusaufgabe als Wiederholung, 10 Punkte)

Seien zwei Vierecke A und B mit den Ecken a_1, a_2, a_3, a_4 und b_1, b_2, b_3, b_4 gegeben. Die beiden Vierecke heißen ähnlich, wenn bei geeigneter Nummerierung der Eckpunkte jeweils alle paarweisen Streckenverhältnisse in A mit denen in B übereinstimmen, also $\frac{|a_i a_j|}{|a_k a_l|} = \frac{|b_i b_j|}{|b_k b_l|}$. (Definition analog zur Ähnlichkeit von Dreiecken)

Unter welchen Bedingungen sind folgende Figuren der reellen Ebene also ähnlich?
a) zwei Quadrate,
b) zwei Rechtecke,
c) zwei Rauten,
d) zwei Parallelogramme

Begründen Sie Ihre Ansicht!