FU Berlin: WiSe 18/19 (Mathematik II, Weber)

Abschlussklausur 19.3.2019, 14:10 bis 16:50

Name:

Matrikelnummer: **Unterschrift:**

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**25**	**20**	**30**	**25**	**25**	**25**	**25**	**175**
Erreichte Punktzahl								

☐ bestanden (mindestens 88 Punkte) ☐ nicht bestanden

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 160 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus sieben Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 175 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite oben angegeben.

5. Verwenden Sie KEINE Abkürzungen! Geben Sie bei jeder Aufgabe den genauen Lösungsweg an.

6. Lösungen ohne Lösungsweg und nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Aufgabe 1: (Eigenschaften von Matrizen, 25 Punkte)

Nehmen wir an, eine 3x3-Matrix A stelle eine Spiegelung an einer Spiegelebene dar, die durch die beiden dreidimensionalen Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Beantworten Sie die folgenden Fragen, ohne die Matrix explizit ausgerechnet zu haben und begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Ist die Matrix A orthogonal?

b) Was ist der Wert der Determinante von A?

c) Welche Eigenwerte hat A? Geben Sie zu jedem Eigenwert alle zugehörigen Eigenvektoren an! (Tipp: Kreuzprodukt)

Aufgabe 2: (Fouriertransformation, 20 Punkte)

Gegeben sei folgende "Abklingfunktion" mit einer positiven reellen Zahl $a \in \mathbb{R}^+$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & \text{für } x \geq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie ausführlich die Fouriertransformation dieser Funktion!

Aufgabe 3: (Orthonormalsystem, 30 Punkte)

Gegeben seien die folgenden reellwertigen Funktionen

$$f(x) = x, \;\; g(x) = x^{-1}$$

und das Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_1^2 f(x)g(x)dx$.

a) Welche Norm $\|h\| = \sqrt{\langle h|h\rangle}$ haben die beiden Funktionen f und g jeweils bezogen auf das gegebene Skalarprodukt? Zeigen Sie den Rechenweg auf!

b) Stehen die beiden Funktionen bezogen auf das Skalarprodukt orthogonal zueinander? Begründen Sie Ihre Ansicht!

c) Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren durch, um zwei Funktionen zu erhalten, die den gleichen Vektorraum wie f und g aufspannen, jedoch ein Orthonormalsystem bilden.

Aufgabe 4: (Determinante einer Matrix, 25 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Bild-Kern-Algorithmus das Bild und den Kern dieser Matrix!

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix!

c) Lässt sich in Hinblick auf Aufgabenteil b) eine konkrete Aussage über die Lösbarkeit und die Eindeutigkeit der Lösung eines Gleichungssystems $Ax = b$ mit der Matrix A als Koeffizientenmatrix angeben? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 5: (Kurvendiskussion in 2 Dimensionen, 25 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = y(x^3 + x^2 - x - 1) - \cos(\pi x)$.

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Funktion!

b) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion! Geben Sie den Rechenweg an!

c) Bestimmen Sie für <u>einen</u> der kritischen Punkte aus Teilaufgabe a), ob es sich dabei um ein Maximum, Minimum oder einen Sattelpunkt handelt. Begründen Sie ausführlich!

Aufgabe 6: (Koordinatentransformation, 25 Punkte)

Es soll folgendes Bereichsintegral gerechnet werden:

$$\int_K e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\, d(x,y),$$

wobei K die Fläche des Kreises um den Ursprung mit Radius 1 sein soll. Um das Integral zu berechnen, führen wir eine Koordinatentransformation auf Polarkoordinaten $x = r\,cos(\theta)$ und $y = r\,sin(\theta)$ durch.

a) Wie lauten die Integrationsgrenzen für r und für θ?

b) Wie lautet der Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix der gegebenen Koordinatentransformation?

c) Wie lautet also das zu berechnende Bereichsintegral in Polarkoordinaten?

d) Welchen Wert hat das Integral?

Aufgabe 7: (Lineares Differentialgleichungssystem, 25 Punkte)

Zu lösen sei folgendes lineares Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t).$$

a) Berechnen Sie ausführlich die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a) die allgemeine Lösung des obigen Differentialgleichungssystems an!

Viel Erfolg!