Aufgabe 1: (Euklidischer Algorithmus, Horner-Schema, komplexe Zahlen, 25 Punkte)

Gegeben sei folgender Bruch:

$$\frac{z^3 - 3z^2 - 3z - 4}{z^2 - z - 12}$$

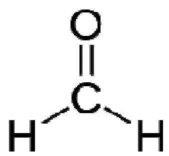
a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von Zähler und Nenner mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

b) Eine gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner ist $z_0 = 4$. Nutzen Sie das Horner-Schema, um den Faktor $(z - 4)$ aus Zähler und Nenner zu kürzen. Wie lautet der so gekürzte Bruch?

c) Welchen Wert hat der Bruch, wenn man für z die imaginäre Einheit $z = \mathrm{i}$ einsetzt? Drücken Sie das Ergebnis in kartesischer Darstellung $x + \mathrm{i}y$ aus.

Aufgabe 2: (Symmetriegruppen, 25 Punkte)

Formaldehyd hat folgende Lewis-Formel:



a) Formaldehyd hat eine bestimmte Molekül-Symmetrie. Diese Symmetrie wird in Form einer Symmetriegruppe mit einer entsprechenden Verknüpfungstafel (Hintereinanderausführen der Symmetrieoperationen) ausgedrückt. Füllen Sie die Verknüpfungstafel vollständig aus:

+	1	s_h	s_v	d_{180}
1	**1**	s_h	s_v	d_{180}
s_h	s_h		d_{180}	
s_v	s_v			
d_{180}	d_{180}			

(1=Identität, s_h=Spiegelung an der "Papierebene", s_v=Spiegelung an der Ebene, die orthogonal zum Papier verläuft, d_{180}=Drehung um 180° mit Drehachse entlang der C=O-Bindung)

b) Ist die entstandene Symmetriegruppe abelsch? Begründen Sie!

c) Lösen Sie die Gleichung $s_h + x = s_v$ durch Umformung nach x auf. Schreiben Sie bei jedem Schritt der Umformung auf, welche Eigenschaft einer Gruppe Sie dabei verwendet haben. (Hinweis: Sie werden sämtliche Eigenschaften verwenden)

Aufgabe 3: (Unbestimmte Integrale, Partielle Integration, Substitution, 30 Punkte)

a) Ermitteln Sie mit Hilfe der partiellen Integration die Stammfunktionen

$$\int x^2 \cos(x)\, dx.$$

b) Ermitteln Sie mit Hilfe von Substitution $t = \sqrt{x}$ und partieller Integration die Stammfunktionen

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\, dx.$$

Aufgabe 4: (Taylor-Entwicklung, De L'Hospital, 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(x_0; x)$ für die Funktion $\ln(x+1)$ und den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Prüfen Sie dabei, ob die Regel von De L'Hospital angewendet werden kann.

Viel Erfolg!