FU Berlin: SoSe 15 (Mathematik I, Weber)

Zweite Teilklausur 17.7.2015 10:15 bis 11:45

Allgemeine Hinweise zur Klausur:

1. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

2. Bitte trennen Sie die Lösungsblätter von den "Schmierzetteln" und geben Sie nur die *jeweils(!)* unterschriebenen Lösungsblätter ab, die in die Bewertung eingehen sollen. Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen UND Ihrer Matrikelnummer.

3. Die Klausur besteht aus vier Aufgaben. Überprüfen Sie bitte sofort, ob alle Aufgabentexte vorhanden sind.

4. Die maximal erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt 100 Punkte. Die jeweils mit einer Aufgabe maximal erreichbare Punktzahl ist auf dieser Seite unten angegeben.

5. Bitte verwenden Sie KEINE Abkürzungen!

6. Nicht eindeutig erkennbare Antworten werden als nicht vorhanden gewertet.

7. Die Verwendung von Hilfsmitteln ist nicht zulässig. Dies gilt insbesondere für Taschenrechner und eigenes Schreibpapier (Sie erhalten von uns Papier).

8. Der Termin zur Einsicht in die Beurteilung der Klausuren wird noch bekannt gegeben. Einsprüche gegen die Bewertung der Klausuren werden nur zu diesem Termin entgegengenommen. Die korrigierten Klausuren werden von der FU einbehalten und nicht zurückgegeben.

Bewertung (vom Dozenten auszufüllen):

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**Summe**
Maximal erreichbare Punkte	**20**	**30**	**20**	**30**	**100**
Erreichte Punktzahl					

Resultierende Benotung der Klausur: ______________________________

Bekanntgabe der Noten:

Es kann, wenn Sie es wünschen, die Benotung Ihrer Klausur (voraussichtlich ab Ende Juli) im Internet ungesichert veröffentlicht werden.

Entweder

- ☐ Ich wünsche eine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet
  - ☐ unter meiner Matrikelnummer
  - ☐ unter folgendem Kürzel: ______________________

oder sonst gilt der „Normalfall“

- ☐ Ich wünsche keine ungesicherte Veröffentlichung meiner Note im Internet. Die Bewertung der Klausur kann bei der Nachbesprechung erfahren werden.

Name:	
Matrikelnummer:	**Unterschrift:**

Aufgabe 1: (Regel von de L'Hospital, 20 Punkte)

Es sollen folgende Grenzwerte ermittelt werden:

1. $\lim_{x\to 1} \frac{2-2\cos(x-1)}{x^2-x}$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x+1}$

a) Bei welchem Grenzwert lässt sich die Regel von de L'Hospital anwenden? Bei welchem nicht? Begründen Sie!

b) Bestimmen Sie beide Grenzwerte!

Aufgabe 2: (Potenzreihenansatz, 30 Punkte)

Folgende Anfangswertaufgabe soll gelöst werden: Gesucht ist eine Funktion $f(x)$ mit

$$f''(x) - f'(x) - f(x) = 0, \quad f(0) = 1,\ f'(0) = 0.$$

Nutzen Sie dazu den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, wobei die Koeffizienten durch eine Taylor-Reihe gegeben sind. Für den n-ten Koeffizienten gilt also $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

a) Welcher Entwicklungspunkt x_0 eignet sich aufgrund der Anfangswertaufgabe für die Taylor-Reihe? Bestimmen Sie daraus die Werte für a_0 und a_1.

b) Wie lauten die Potenzreihenentwicklungen für $f'(x)$ und für $f''(x)$? Achten Sie darauf, dass alle Reihen mit $n = 0$ beginnen. (Indexverschiebung)

c) Bestimmen Sie aus der Differentialgleichung und aus den Ergebnissen von b) eine Rekursionsformel für a_{n+2}, wenn a_{n+1} und a_n gegeben sind.

d) Rechnen Sie mit Hilfe der Rekursionsformel a_2 und a_3 aus.

Aufgabe 3: (Trennung der Variablen, 20 Punkte)

Es sollen alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichung bestimmt werden:

$$y' = \frac{x}{y^2 + 1}.$$

a) Bestimmen Sie Funktionen f und g, so dass $y' = f(x) \cdot g(y)$.

b) Hat $g(y)$ (reelle) Nullstellen?

c) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung, indem Sie die Methode der Trennung der Variablen durchführen. Sie dürfen die Lösungen implizit angeben.

Aufgabe 4: (Exakte Differentialgleichung, 30 Punkte)

Gesucht sind alle (impliziten) Lösungen der folgenden Differentialgleichung

$$(2x^2 + xye^x)\, dx + xe^x\, dy = 0$$

a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung nicht exakt ist.

b) Teilen Sie die (beiden Seiten der) Gleichung durch x**.** Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung, die sich ergibt, exakt ist.

c) Finden Sie alle Lösungen der exakten Differentialgleichung aus b). Sie dürfen die Lösungen implizit darstellen.

d) In b) haben Sie die beiden Seiten einer Gleichung durch x geteilt. Das geht ja nur für $x \neq 0$. Damit könnte eine Lösung der DGL "verloren gegangen" sein. Zeigen Sie, dass auch $x = 0$ eine (weitere) Lösung der Differentialgleichung ist.

Viel Erfolg!